Résoudre dans $\mathbb{R}$: $1 + x(x+2) + [x(x+2)]^2 + [x(x+2)]^3 + \ldots.. + [x(x+2)]^7 = 0$.

Pour $q = 1$, on sait : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = n + 1$.

Pour $q \neq 1$, on sait : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (somme de $n + 1$ termes d'une suite géométrique, de premier terme 1 , de raison q) .

a) Soit : $x(x+2) = 1$ ($q = 1$) :

$x(x+2) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}$ ou $x = -1 - \sqrt{2}$.

Pour ces deux valeurs de x : $1 + x(x+2) + [x(x+2)]^2 + [x(x+2)]^3 + \ldots.. + [x(x+2)]^7 = 8$ donc, elles ne sont pas solutions.

b) Soit : $x(x+2) \neq 1$ ($q \neq 1$) : D'où $x \neq -1 + \sqrt{2}$ et $x \neq -1 - \sqrt{2}$.

$1 + q + q^2 + \ldots + q^7 = \dfrac{1 - q^8}{1 - q} = 0 \Leftrightarrow q^8 = 1 \Leftrightarrow [x(x+2)]^8 = 1 \Leftrightarrow [x(x+2)]^4 = 1$ puisque $[x(x+2)]^4 = -1$ est impossible.

$[x(x+2)]^4 = 1 \Leftrightarrow [x(x+2)]^2 = 1 \Leftrightarrow x(x+2) = 1$ ou $x(x+2) = -1$.

On a déjà étudié le cas $x(x+2) = 1$, qui ne convient pas.

$x(x+2) = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$, soit : $x = -1$.

On conclue : $S = \{-1\}$.

Vérification :

$x = -1 \Rightarrow x(x+2) = -1$. $\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair : } [x(x+2)]^n = +1 \\ \text{Si } n \text{ est impair : } [x(x+2)]^n = -1 \end{cases}$.

$1 + x(x+2) + [x(x+2)]^2 + [x(x+2)]^3 + \ldots.. + [x(x+2)]^7 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$.