1/ Démontrer les égalités et inégalités suivantes :

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

On sait que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, pour tout x réel.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = (\sin x)^2 + 2\sin x \cos x + (\cos x)^2$.

Sachant que l'on note $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ et $(\cos x)^2 = \cos^2 x$, on obtient :

$(\sin x + \cos x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$.

b) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$.

De même : $(\sin x - \cos x)^2 = (\sin x)^2 - 2\sin x \cos x + (\cos x)^2$

$(\sin x - \cos x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x \cos x = 1 - 2\sin x \cos x$.

c) $-2 \leq \sin x + \cos x \leq +2$.

On sait que $\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq +1 \\ -1 \leq \cos x \leq +1 \end{array} \right\}$ d'où $-2 \leq \sin x + \cos x \leq +2$.

2/ Trouver un encadrement pour tout x réel de :

$2\sin x$ $\quad$ $1 + 2\sin x$ $\quad$ $2\sin x - \cos x$.

$-1 \leq \sin x \leq +1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq +2$.

$-2 \leq 2\sin x \leq +2 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2\sin x \leq +3$.

$\left\{ \begin{array}{l} -2 \leq 2\sin x \leq +2 \\ -1 \leq -\cos x \leq +1 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 \leq 2\sin x - \cos x \leq +3$.