Soit les suites (a_n) , (b_n) , (s_n) et (d_n) telles que $\left\{ \begin{array}{c} a_0 = 0 \text{ et } a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 1}{4} \\ b_0 = 2 \text{ et } b_{n+1} = \dfrac{3b_n + 1}{4} \\ s_n = a_n + b_n \\ d_n = b_n - a_n \end{array} \right\}$ **pour tout entier naturel n .**

1/ Montrer que la suite (s_n) est constante.

Vérifions que $s_{n+1} = s_n$, pour tout entier naturel n :

$s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{3a_n + 1}{4} + \dfrac{3b_n + 1}{4} = \dfrac{3}{4}(a_n + b_n) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} s_n + \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $s_1 = \dfrac{3}{4} s_0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(a_0 + b_0) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$.

On constate que $s_1 = s_0 = 2$.

En reportant dans la relation : $s_{n+1} = \dfrac{3}{4} s_n + \dfrac{1}{2}$, on déduit que $s_n = 2 \Rightarrow s_{n+1} = 2$.

La suite (s_n) est constante, de valeur $s_n = 2$.

2-a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

$d_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{3b_n + 1}{4} - \dfrac{3a_n + 1}{4} = \dfrac{3}{4}(b_n - a_n) = \dfrac{3}{4} d_n$, ce qui prouve que la suite (d_n) est géométrique,

de raison $q = \dfrac{1}{2}$. Par ailleurs : $d_0 = b_0 - a_0 = 2$.

b) Exprimer d_n en fonction de n .

$d_n = d_0.q^n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

3/ En déduire l'écriture de a_n et b_n en fonction de n .

$\left\{ \begin{array}{l} s_n = a_n + b_n \\ d_n = -a_n + b_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{2}(s_n - d_n) = \dfrac{1}{2}\left(2 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right) = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \\ b_n = \dfrac{1}{2}(s_n + d_n) = \dfrac{1}{2}\left(2 + 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right) = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \end{array} \right.$.

4/ Déterminer les limites de d_n , a_n et b_n lorsque n tend vers l'infini.

$q = \dfrac{3}{4}$, soit $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 0$.

$a_n = \dfrac{1}{2}(s_n - d_n) = \dfrac{1}{2}(2 - d_n) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} d_n\right) = +1$.

$b_n = \dfrac{1}{2}(s_n + d_n) = \dfrac{1}{2}(2 + d_n) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} d_n\right) = +1$.