Soit la fonction f définie sur]-1 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$.

1/ Montrer que $f(x) = \dfrac{-4}{x+1} + 2$.

$$\frac{-4}{x+1} + 2 = \frac{-4 + 2(x+1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1} .$$

2/ Déterminer le sens de variation de f à partir des fonctions de référence.

1[ère] Méthode :

Soit a , b réels tels que : $-1 < a < b$.

$-1 < a < b \Leftrightarrow 0 < a + 1 < b + 1$, donc tous les termes de cette inéquation sont positifs.

La fonction "prendre l'inverse" $i : x \to i(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante de]0 ; +∞[sur]0 ; +∞[, donc inverse les ordres des nombres positifs : $0 < A < B \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{B} < \dfrac{1}{A}$.

D'où : $0 < a + 1 < b + 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b+1} < \dfrac{1}{a+1} \Rightarrow \dfrac{-4}{a+1} < \dfrac{-4}{b+1} < 0 \Rightarrow \dfrac{-4}{a+1} + 2 < \dfrac{-4}{b+1} + 2 < 2$.

En conclusion : $-1 < a < b \Rightarrow f(a) < f(b) < 2$.

La fonction f est *croissante* de]-1 ; +∞[sur]-∞ ; 2[.

2[ème] Méthode :

On décompose la fonction f en fonctions de *référence* :

$$x \xrightarrow{a} x + 1 \xrightarrow{i} \frac{1}{x+1} \xrightarrow{b} (-4) \times \frac{1}{x+1} + 2 = \frac{-4}{x+1} + 2 .$$

f est la *composée* $f = b \circ i \circ a$ avec $\begin{cases} a : x \to a(x) = x + 1 \\ c : x \to i(x) = \dfrac{1}{x} \\ b : x \to b(x) = -4x + 2 \end{cases}$.

$a : x \to a(x) = x + 1$ est une fonction affine de coefficient directeur +1 , croissante de]-∞ ; +∞[sur]-∞ ; +∞[.

a est *croissante* de]-1 ; +∞[sur]0 ; +∞[.

$i : x \to i(x) = \dfrac{1}{x}$ est la fonction "prendre l'inverse" $\begin{cases} \text{décroissante de }]-\infty , 0[\text{ sur }]-\infty , 0[\\ \text{décroissante de }]0 , +\infty[\text{ sur }]0 , +\infty[\end{cases}$.

i est *décroissante* de]0 ; +∞[sur]0 ; +∞[(on pourrait dire de]0 ; +∞[sur]+∞ ; 0[ ) .

$b : x \to b(x) = -4x + 2$, fonction affine de coefficient directeur -4 , décroissante de]-∞ ; +∞[sur]-∞ ; +∞[.

b est *décroissante* de]0 ; +∞[sur]-∞ ; 2[.

A l'identique de la *règle des signes* des multiplications, la *composition* de 2 fonctions dé*croissantes* (–) et d'une fonction *croissante* (+) est une fonction *décroissante* (+ × – × – = +) .

f est décroissante de]-1 ; +∞[sur]-∞ ; 2[.