Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ par : $f(x) = -3(x-4)^2 + 2$.

Déterminer le sens de variation de f à partir des fonctions de référence.

1ère Méthode :

Soit a , b réels tels que : $a < b \leq +4$.

$a < b \leq +4 \iff a - 4 < b - 4 \leq 0$, donc chaque terme de cette inéquation est négatif ou nul.

La fonction "mettre au carré" $c : x \to c(x) = x^2$ est décroissante de $]-\infty\,;0]$ sur $[0\,;+\infty[$, donc inverse les ordres des nombres négatifs : $A < B \leq 0 \Rightarrow 0 \leq B^2 < A^2$.

D'où : $a - 4 < b - 4 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (b-4)^2 < (a-4)^2$.

La multiplication par -3 inverse les ordres :

$-3(a-4)^2 < -3(b-4)^2 \leq 0 \Rightarrow -3(a-4)^2 + 2 < -3(b-4)^2 + 2 \leq 2$.

En conclusion : $a < b \leq +4 \Rightarrow f(a) < f(b) \leq f(4)$.

La fonction f est *croissante* de $]-\infty\,;4]$ sur $]-\infty\,;2]$.

2ème Méthode :

On décompose la fonction f en fonctions de *référence* :

$x \xrightarrow{a} x - 4 \xrightarrow{c} (x-4)^2 \xrightarrow{b} -3(x-4)^2 + 2$.

f est la *composée* $f = b \circ c \circ a$ avec $\begin{cases} a : x \to a(x) = x - 4 \\ c : x \to c(x) = x^2 \\ b : x \to b(x) = -3x + 2 \end{cases}$.

$a : x \to a(x) = x - 4$ est une fonction affine de coefficient directeur + 1 , croissante de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

a est *croissante* de $]-\infty\,;4]$ sur $]-\infty\,;0]$.

$c : x \to c(x) = x^2$ est la fonction "mettre au carré" $\begin{cases} \text{décroissante de }]-\infty\,,0] \text{ sur } [0\,,+\infty[\\ \text{croissante de } [0\,,+\infty[\text{ sur } [0\,,+\infty[\end{cases}$.

c est *décroissante* de $]-\infty\,;0]$ sur $[0\,;+\infty[$.

$b : x \to b(x) = -3x + 2$, fonction affine de coefficient directeur -3 , décroissante de $]-\infty\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

b est *décroissante* de $[0\,;+\infty[$ sur $]-\infty\,;2]$.

A l'identique de la *règle des signes* des multiplications, la *composition* de 2 fonctions *décroissantes* (–) et d'une fonction *croissante* (+) est une fonction *croissante* (+ × – × – = +) .

f est croissante de $]-\infty\,;4]$ sur $]-\infty\,;2]$.