Soit la fonction f définie sur [-2 ; 5] par : $f(x) = (x - 5)^2 + 1$.

Déterminer le sens de variation de f .

1ère Méthode :

Soit a , b réels tels que : $-2 \leq a < b \leq +5$.

$-2 \leq a < b \leq +5 \Leftrightarrow -7 \leq a - 5 < b - 5 \leq 0$, donc chaque terme de cette inéquation est négatif ou nul.

La fonction "mettre au carré" $c : x \to c(x) = x^2$ est décroissante de $]-\infty ; 0]$ sur $[0 ; +\infty[$, donc inverse les ordres des nombres négatifs : $A < B \leq 0 \Rightarrow 0 \leq B^2 < A^2$.

D'où : $-7 \leq a - 5 < b - 5 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (b - 5)^2 < (a - 5)^2 \leq (-7)^2$.

$0 \leq (b - 5)^2 < (a - 5)^2 \leq 49 \Leftrightarrow 1 \leq (b - 5)^2 + 1 < (a - 5)^2 + 1 \leq 50$.

En conclusion : $-2 \leq a < b \leq +5 \Rightarrow f(5) \leq f(b) < f(a) \leq f(-2)$.

La fonction f est *décroissante* de [-2 ; 5] sur [1 ; 50] .

(on remarquera que l'on dit [1 ; 50] bien qu'il s'agisse en fait de [50 ; 1]).

2ème Méthode :

On décompose la fonction f en fonctions de *référence* :

$x \xrightarrow{a} x - 5 \xrightarrow{c} (x - 5)^2 \xrightarrow{b} (x - 5)^2 + 1$.

f est la *composée* $f = b \circ c \circ a$ avec $\begin{cases} a : x \to a(x) = x - 5 \\ c : x \to c(x) = x^2 \\ b : x \to b(x) = x + 1 \end{cases}$.

$a : x \to a(x) = x - 5$ est une fonction affine de coefficient directeur +1 , croissante de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

a est *croissante* de [-2 ; 5] sur [-7 ; 0] .

$c : x \to c(x) = x^2$ est la fonction "mettre au carré" $\begin{cases} \text{décroissante de }]-\infty , 0] \text{ sur } [0 , +\infty[\\ \text{croissante de } [0 , +\infty[\text{ sur } [0 , +\infty[\end{cases}$.

c est *décroissante* de [-7 ; 0] sur [0 ; 49] .

$b : x \to b(x) = x + 1$ est une fonction affine de coefficient directeur + 1 , croissante de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

b est *croissante* de [0 ; 49] sur [1 ; 50] .

A l'identique de la *règle des signes* des multiplications, la *composition* de 2 fonctions *croissantes* (+) et d'une fonction *décroissante* (–) est une fonction *décroissante* ($+ \times + \times - = -$) .

f est décroissante de [-2 ; 5] sur [1 ; 50] .