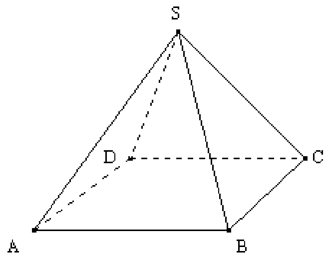
1/ Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide droite (*ABCDS*) .



Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard, et de façon équiprobable, vers un sommet voisin (on dit qu'elle fait un "pas").
La fourmi se trouve initialement en *A* .

En S , quatre chemins équiprobables sont possibles, chacun de probabilité $\frac{1}{4}$.

En tout autre sommet, trois chemins équiprobables sont possibles, chacun de probabilité $\frac{1}{3}$.

a) Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit : en *A* ? en *B* ? en *C* ? en *D* ?.

- A partir de A , les circuits possibles pour revenir en A sont : (B , A) , (D , A) et (S , A) .

$p(B , A) = p(B) \times p_B(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

$p(D , A) = p(D) \times p_D(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

$p(S , A) = p(S) \times p_S(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Ces trois chemins étant incompatibles, on déduit : $p_A = p(B , A) + p(D , A) + p(S , A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{11}{36}$.

- A partir de A , le seul circuit possible pour revenir en B est : (S , B) .

$p_B = p(S , B) = p(S) \times p_S(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

- A partir de A , les circuits possibles pour revenir en C sont : (B , C) , (D , C) et (S , C) .
La situation est identique à celle permettant de revenir en A :

$p_C = p(B , C) + p(D , C) + p(S , C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{11}{36}$.

- A partir de A , le seul circuit possible pour revenir en D est : (S , D) .
La situation est identique à celle permettant de revenir en B :

$P_D = p(S , D) = p(S) \times p_S(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

b) en déduire la probabilité pour qu'après ces mêmes deux pas, elle se trouve en *S* .

Cet événement est l'événement contraire des trois précédents :

$p_S = 1 - (p_A + p_B + p_C + p_D) = 1 - (\frac{11}{36} + \frac{1}{12} + \frac{11}{36} + \frac{1}{12}) = 1 - \frac{28}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Deuxième méthode :

- A partir de A , les circuits possibles pour revenir en S sont : $(B\ ,S)$, $(D\ ,S)$.

$p_S = p(B\ ,S) + p(D\ ,S) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

c) Soit n un nombre entier strictement positif, et S_n l'événement : "La fourmi est au sommet S après n pas" . Soit p_n la probabilité de cet événement.

- **Déterminer p_1 .**

Partant de A , les trois sommets B , D , S étant équiprobables, on déduit bien $p_S = \frac{1}{3} = p_1$.

- **Montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.**

Lions l'événement S_{n+1} "Se trouver en S après $n + 1$ pas" , à l'événement S_n "Se trouver en S après n pas".

- Si S_n est réalisé, la fourmi se trouve en S après le $n^{\text{ième}}$ pas.

Elle ne peut donc encore être en S après le $n+1^{\text{ième}}$ pas, soit $p_{S_n}(S_{n+1}) = 0$.

- Si S_n n'est pas réalisé, la fourmi se trouve en A, B , C ou D après le $n^{\text{ième}}$ pas.

La probabilité de se trouver en S après le $n+1^{\text{ième}}$ pas est alors de $\frac{1}{3}$, soit $p_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

Pour que S_{n+1} se réalise, deux situations antérieures incompatibles sont à envisager :

Soit S_n s'était réalisé, soit son événement contraire $\overline{S_n}$ l'avait été :

$p(S_{n+1}) = p(S_{n+1} \cap S_n) + p(S_{n+1} \cap \overline{S_n}) = p(S_n) \times p_{S_n}(S_{n+1}) + p(\overline{S_n}) \times p_{\overline{S_n}}(S_{n+1})$.

Comme $p_{S_n}(S_{n+1}) = 0$ et $p_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = \frac{1}{3}$, on déduit : $p(S_{n+1}) = \frac{1}{3}p(\overline{S_n}) = \frac{1}{3}(1 - p(S_n))$,

D'où $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

2/ On considère la suite (p_n) , définie pour tout entier n strictement positif par $\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} \\ p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, $p_n = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$.

Soit E_n la proposition " $p_n = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ " .

- *Montrons que* E_1 *est vraie* :

E_1 dit " $p_1 = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^1\right]$ " , soit $p_1 = \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$, ce qui est vrai par hypothèse.

- *Montrons que* E_{n+1} *est vraie sous réserves de* E_n *vraie* :

On suppose donc que $p_n = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$, dont on doit déduire $p_{n+1} = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.

On sait que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$, d'où : $p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]\right) = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$,

$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.

- *Conclusion* : E_n *est vraie pour tout entier naturel* n *non nul.*

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

$q = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow |q| < 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{4}(1 - 0) = \dfrac{1}{4}$.

Interpréter le résultat.

On peut dire que : Plus le nombre n de pas est grand, plus la probabilité de se trouver en S est proche de $\dfrac{1}{4}$.