1/ L'unité de mesure étant le radian, et sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer $\sin\frac{\pi}{5}$.

On sait que : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, pour tout angle réel a.

$$\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16} = 1 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{16-5-2\sqrt{5}-1}{16}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

Deux nombres opposés ayant même carré, on sait que : $X^2 = A^2 \Leftrightarrow X = A$ ou $X = -A$.

Ainsi : $X^2 = 9 \Leftrightarrow X = +3$ ou $X = -3$.

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{5} = \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{\pi}{5} = +\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = +\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \text{ou} \\ \sin\frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}.$$

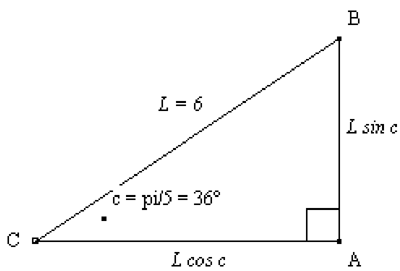
$$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36° \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{5} < 90°.$$

Comme tous les angles du premier *quadrant* : $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{5} > 0$.

On conclue : $\sin\frac{\pi}{5} = +\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}588$ par excès.

2/ Dans un triangle (ABC), rectangle en A, on sait que $BC = 6$ cm et $\widehat{C} = \frac{\pi}{5}$ radian.

Calculer AB et AC.



$$\sin\widehat{C} = \frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}, \text{ soit : } \sin\frac{\pi}{5} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB = BC \times \sin\frac{\pi}{5} = 6 \times \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{3\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

$AB = 6 \times 0{,}588 = 3{,}53$ cm par excès.

$$\cos\widehat{C} = \frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}, \text{ soit : } \cos\frac{\pi}{5} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow AC = BC \times \cos\frac{\pi}{5} = 6 \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

$AC = 6 \times 0{,}809 = 4{,}85$ cm par défaut.