Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $|x-4| = |x+3|$ **.**

Méthode 1 :

$|x-4| = |x+3| \Leftrightarrow |x-4| = |x-(-3)|$.

Sachant que $|x-a|$ mesure la distance $(x\,;a)$, l'équation $|x-a| = |x-b|$ signifie que x est *équidistant* de a et b, donc situé au milieu de $[a\,;b]$, soit : $x = \dfrac{a+b}{2}$.

$|x-4| = |x-(-3)| \Leftrightarrow x = \dfrac{4+(-3)}{2} = +\dfrac{1}{2}$.

Méthode 2 :

Deux nombres ont même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés : $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \text{ou} \\ b = -a \end{cases}$.

$$|x-4| = |x+3| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+3 = x-4 \Leftrightarrow 3 = -4 \ \text{(impossible)} \\ \text{ou} \\ x+3 = -x+4 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = +\dfrac{1}{2} \end{array} \right\}, \text{ d'où : } S = \{+\tfrac{1}{2}\} .$$

b) $|2x+3| = |4-3x|$ **.**

Les coefficients de x, dans chaque membre de l'équation, n'étant ni égaux, ni opposés, seule la Méthode 2 est utilisable :

$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \text{ou} \\ b = -a \end{cases}$, soit :

$$|2x+3| = |4-3x| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4-3x = 2x+3 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = +\dfrac{1}{5} \\ \text{ou} \\ 4-3x = -2x-3 \Leftrightarrow -x = -7 \Leftrightarrow x = +7 \end{array} \right\}, \text{ d'où : } S = \{+\tfrac{1}{5}\,; +7\} .$$

c) $|-2x+5| = 3x+1$ **.**

Le résultat d'une valeur absolue étant toujours positif ou nul, une condition s'impose pour que des solutions puissent exister : $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$.

Seules des solutions vérifiant cette condition pourront être acceptées.

Sachant $3x+1 \geq 0$, et que $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$, l'équation proposée équivaut à : $|-2x+5| = |3x+1|$.

Deux nombres ont même valeur absolue s'ils sont égaux ou opposés : $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \text{ou} \\ b = -a \end{cases}$.

$$|-2x+5| = |3x+1| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x+5 = 3x+1 \Leftrightarrow -5x = -4 \Leftrightarrow x = +\dfrac{4}{5} \ \text{(valable)} \\ \text{ou} \\ -2x+5 = -3x-1 \Leftrightarrow x = -6 \ \text{(non valable)} \end{array} \right\}, \text{ d'où : } S = \{+\tfrac{4}{5}\} .$$