On veut résoudre l'inéquation $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 \leq 0$.

1/ Montrer que dans le polynôme $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ on peut factoriser le terme $x^2 + k$, où k est un nombre réel que l'on déterminera.

Soit $P(x) = (x^2 + k)(ax^2 + bx + c)$.

Développons ce produit pour l'identifier à $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$.

$(x^2 + k)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + akx^2 + bkx + ck = ax^4 + bx^3 + (ak + c)x^2 + (bk)x + ck$.

On déduit $\left\{ \begin{array}{c} a = 2 \\ b = -1 \\ ak + c = 1 \\ bk = -1 \\ ck = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -1 \text{ et } bk = -1 \Rightarrow k = 1 \\ k = 1 \text{ et } ck = -1 \Rightarrow c = -1 \\ ak + c = 2 - 1 = 1 \text{ est confirmé} \end{array} \right.$.

On déduit : $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 1)(2x^2 - x - 1)$.

2/ Terminer la résolution de l'inéquation initiale.

Comme $x^2 + 1 > 0$, quel que soit x réel, on déduit que $P(x)$ est partout du signe de $2x^2 - x - 1$.

Les coefficients de ce polynôme vérifient : $a + b + c = 0$, d'où ses racines $x_1 = +1; x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$.

$2x^2 - x - 1$ est du signe de $a = 2$, donc positif à l'extérieur de ses racines.

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$x^2 + 1$		+	|	+	|	+	
$2x^2 - x - 1$		+	0	–	0	+	
$\boldsymbol{P(x)}$		**+**	**0**	**–**	**0**	**+**	

$S = [-\frac{1}{2} ; +1]$.