Soit $A=\dfrac{2}{3-\sqrt{3}}$ et $B=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$. Calculer $A+B$, $A\times B$, A^2-B^2.

Pour se débarrasser des racines carrées des dénominateur, on ne peut élever au carré les expressions, tout d'abord parce que "mettre au carré" change la valeur de celles-ci, et parce qu'alors un "double produit" apparaît, qui crée une autre racine carrée.

Il faut utiliser les quantités conjuguées : $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=a^2-b^2$.

$$A+B=\frac{2}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}+\frac{3-\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{6+2\sqrt{3}}{3^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{3-2\sqrt{3}}{3^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$A+B=\frac{6+2\sqrt{3}}{9-3}+\frac{3-2\sqrt{3}}{9-3}=\frac{6+2\sqrt{3}}{6}+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}=\frac{6+2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

$$A\times B=\frac{2}{3-\sqrt{3}}\times\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\frac{2}{3^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2}{9-3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$A^2-B^2=\left(\frac{2}{3-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2^2}{(3-\sqrt{3})^2}-\frac{1^2}{(3+\sqrt{3})^2}=\frac{4}{(3-\sqrt{3})^2}-\frac{1}{(3+\sqrt{3})^2},$$

$$A^2-B^2=\frac{4}{9-6\sqrt{3}+3}-\frac{1}{9+6\sqrt{3}+3}=\frac{4}{12-6\sqrt{3}}-\frac{1}{12+6\sqrt{3}}=\frac{4(12+6\sqrt{3})}{(12-6\sqrt{3})(12+6\sqrt{3})}-\frac{12-6\sqrt{3}}{(12-6\sqrt{3})(12+6\sqrt{3})}$$

$$A^2-B^2=\frac{48+24\sqrt{3}}{12^2-(6\sqrt{3})^2}-\frac{12-6\sqrt{3}}{12^2-(6\sqrt{3})^2}=\frac{48+24\sqrt{3}}{144-108}-\frac{12-6\sqrt{3}}{144-108}=\frac{48+24\sqrt{3}-12+6\sqrt{3}}{36}=\frac{36+30\sqrt{3}}{36};$$

$$A^2-B^2=\frac{18+15\sqrt{3}}{18}=1+\frac{5}{6}\sqrt{3}.$$