Solution – Sens de Variation – Fonction Rationnelle – Inéquation – s2783

Soit $f : x \to f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ pour tout x réel .

1/ Montrer que f est strictement monotone sur $[0 ; +\infty[$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit : $f'(x) = \dfrac{1.(x+1) - 1.x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2/ En déduire que : $0 < a < b + c \Rightarrow \dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$.

f est strictement croissante, donc : $a < b + c \Rightarrow f(a) < f(b + c)$, or nous allons montrer $f(b + c) < f(b) + f(c)$.

En effet :

$$f(b+c) = \frac{b+c}{(b+c)+1} = \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{b+c+1} .$$

$\begin{cases} 0 < b+1 < b+c+1 \Rightarrow \dfrac{b}{b+c+1} < \dfrac{b}{b+1} \\ 0 < b+1 < b+c+1 \Rightarrow \dfrac{c}{b+c+1} < \dfrac{c}{c+1} \end{cases}$, d'où : $\dfrac{b}{b+c+1} + \dfrac{c}{b+c+1} < \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$, soit :

$f(b + c) < f(b) + f(c)$.

En conclusion :

$f(a) < f(b+c) < f(b) + f(c) \Rightarrow f(a) < f(b) + f(c)$, soit : $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$.