f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$.

1/ Etudier la parité de f .

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1) = -2(-1)^2 + 4(-1) + 5 = -2 - 4 + 5 = -1 \\ f(1) = -2(1)^2 + 4(1) + 5 = -2 + 4 + 5 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ avait été } \textit{paire} \\ \text{ on aurait } f(-1) = f(1) \\ \text{Si } f \text{ ait été } \textit{impaire} \\ \text{ on aurait } f(-1) = -f(1) \end{array}\right. .$$

Ce *contre-exemple* prouve que f n'est ni paire, ni impaire.

2/ Mettre $f(x)$ sous forme canonique. En déduire l'écriture de f en composition de fonctions de référence.

$f(x) = -2x^2 + 4x + 5 = -2(x^2 - 2x) + 5 = -2[(x^2 - 2x + 1) - 1] + 5 = -2(x - 1)^2 + 7$.

Soit $\left\{\begin{array}{c} a : x \to a(x) = x - 1 \\ b(x) = x^2 \\ c(x) = -2x \\ d(x) = x + 7 \end{array}\right\}$. $(d \circ c \circ b \circ a)(x) = (d \circ c \circ b)[a(x)] = (d \circ c \circ b)(x - 1) = (d \circ c)[b(x - 1)]$,

$(d \circ c \circ b \circ a)(x) = (d \circ c)(x - 1)^2 = d[c(x - 1)^2] = d(-2(x - 1)^2) = -2(x - 1)^2 + 7 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3/ Déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$a : x \to x - 1$ est *croissante* de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

$b : x \to x^2$ est $\left\{\begin{array}{l} \textit{décroissante} \text{ de }]-\infty , 0[\text{ sur }]0 , +\infty[\\ \textit{croissante} \text{ de } [0 , +\infty[\text{ sur } [0 , +\infty[\end{array}\right.$.

$c : x \to -2x$ est *décroissante* de $[0 ; +\infty[$ sur $]-\infty ; 0]$.

$d : x \to x + 7$ est *croissante* de $]-\infty ; 0]$ sur $]-\infty ; 7]$.

Sur $]-\infty ; 0[$, on compose un nombre *pair* de fonctions décroissantes, donc f est *croissante* .

Sur $[0 ; +\infty[$, on compose un nombre *impair* de fonctions décroissantes, donc f est *décroissante* .

<u>Tableau de variation :</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$a(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$(b \circ a)(x)$	$+\infty$	↘	<u>0</u>	↗	$+\infty$
$(b \circ a \circ c)(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$
$f(x) = (b \circ a \circ c \circ d)(x)$	**$-\infty$**	↗	**7**	↘	**$-\infty$**

Le maximum de f est constaté en $x = 1$, de valeur : $y = f(0) = 7$.

4/ Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.