1-a) Soit un segment $[BC]$ de longueur 15 cm.

Placer un point A tel que $AB = 9$ cm et $AC = 12$ cm.

On trace les cercles de centres B et C, de rayons respectifs $R = 9$ cm et $R' = 12$ cm.

Ils se coupent en deux points dont l'un ou l'autre peut être le point A.

b) Démontrer que le triangle (ABC) est rectangle.

Vérifions la relation de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

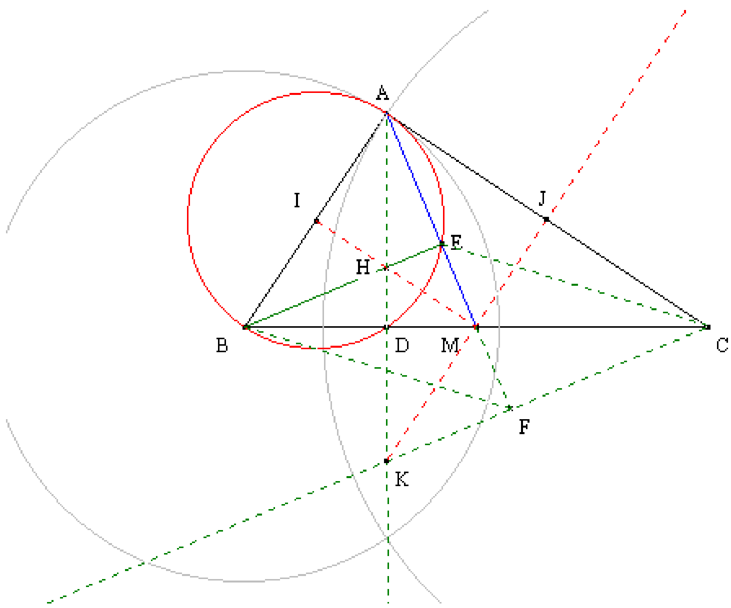
$AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = BC^2$.

Le triangle (ABC) est rectangle en A.

2-a) Soit M le milieu de $[BC]$. Tracer le cercle de diamètre $[AB]$.

Soit deux cercles de même rayon, de centres respectifs A et B, de rayon suffisamment grand pour être sécants. La droite passant par leurs deux points d'intersection coupe le segment $[AB]$ en son milieu, centre du cercle à tracer, qui passe par A et B.

b) Ce cercle recoupe le segment $[BC]$ en D et le segment $[AM]$ en E.



Démontrer que les triangles (ABE) et (ABD) sont rectangles.

Les triangles (ABE) et (ABD) sont inscrits dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$, donc sont respectivement rectangles en E et D.

3-a) Construire le point F symétrique du point E par rapport au point M.

On trace le cercle de centre M, passant par E, qui recoupe la droite (AE) en F.

b) Démontrer que le quadrilatère $(BECF)$ est un parallélogramme.

M est le milieu commun de $[EF]$ et $[BC]$. Le quadrilatère $(BECF)$ est donc un parallélogramme, ses diagonales se coupant en un même milieu M.

c) En déduire que les droites (BE) et (CF) sont parallèles, et que les droites (AF) et (CF) sont perpendiculaires.

Les côtés opposés $[BE]$ et $[CF]$ du parallélogramme $(BECF)$ sont parallèles.

Sachant le triangle (ABE) rectangle en E, son côté $[AE]$ est perpendiculaire à $[BE]$.

La droite (AF) étant donc perpendiculaire à (BE), elle l'est également à sa parallèle (CF).

4/ Soit H le point d'intersection des droites (AD) et (BE).

a) Que représentent les droites (AD) et (BE) pour le triangle (ABM) ?

(AD) et (BE) sont deux hauteurs du triangle (ABM), qui se coupent en l'orthocentre H de ce dernier.

En déduire que les droites (HM) et (AB) sont perpendiculaires.

La droite (HM) est donc la troisième hauteur du triangle (ABM), de ce fait perpendiculaire au côté $[AB]$.

Démontrer de même que les droites (KM) et (AC) sont perpendiculaires.

(CD) et (AF) sont deux hauteurs du triangle (ACK), qui se coupent en l'orthocentre M de ce dernier.

La droite (KM) est donc la troisième hauteur du triangle (ACK), de ce fait perpendiculaire au côté $[AC]$.

b) On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (MH) et J le point d'intersection des droites (AC) et (KM).
Démontrer que le quadrilatère $(AIMJ)$ est un rectangle.

Le quadrilatère $(AIMJ)$ possédant trois angles droits, en A, I et J, est un rectangle.

Remarque : Les triangles (MAB) et (MAC) sont isocèles, de sommet M, ce qui prouve que les hauteurs (MI) et (MJ) sont également médianes, et que I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

En déduire que le triangle (HMK) est rectangle.

Le quatrième angle, en M, du rectangle $(AIMJ)$ est également droit, ce qui prouve que le triangle (HMK) est rectangle en M.