Soit a un nombre réel quelconque.

Comme l'équation $||x^2 - 1| - 4| = a$ admet six solutions dans $\mathbb{R}$, dans quel intervalle se trouve le réel a ?

a) [0 ; 1] b) [1 ; 2] c)]4 ; +∞[d)]3 ; 4[e) [2 ; 3] .

$|x - b| = \alpha$ mesure l'écart *arithmétique* (distance) α entre x et b (x s'écarte de b de la quantité α).

Ainsi : $|x - 3| = 2 \Leftrightarrow x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = +5$ ou $x = -1$.

$||x^2 - 1| - 4| = a$ impose $a \geq 0$.

L'expression $||x^2 - 1| - 4|$ est paire, donc x solution impose $-x$ solution.

Nous ne nous intéresserons donc qu'aux solutions x positives, qui doivent être au nombre de trois.

Remarquons que si l'une des solutions x était nulle, son opposée $-x$ le serait aussi, et le nombre total de solutions serait impair.

L'équation doit donc présenter trois solutions x strictement positives.

Posons $X = |x^2 - 4|$, ce qui impose $X \geq 0$.

L'équation devient $|X - 4| = a$, soit $\left\{\begin{matrix} X = 4 + a \\ X = 4 - a \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |x^2 - 1| = 4 + a \\ |x^2 - 1| = 4 - a \end{matrix}\right.$.

$4 + a > 0$ fait que l'équation $|x^2 - 1| = 4 + a$ admet deux solutions $\left\{\begin{matrix} x^2 = 1 + (4 + a) = 5 + a \\ x^2 = 1 - (4 + a) = -3 - a \end{matrix}\right.$.

$x^2 = 5 + a > 0$ fournit une solution strictement positive $x = \sqrt{5 + a}$.

$x^2 = -3 - a < 0$ n'admet pas de solution x .

L'équation $|x^2 - 1| = 4 - a$ n'admet de solutions que si $4 - a \geq 0$, soit $a \leq 4$.

Si $a = 4$, on déduit $x^2 - 1 = 0$, soit $x^2 = +1$, d'où une solution positive $x = 1$, alors qu'il en faut deux.

Sinon, $4 - a > 0 \Leftrightarrow a < 4$, fait que l'équation $|x^2 - 1| = 4 - a$ admet deux solutions $\left\{\begin{matrix} x^2 = 1 + (4 - a) = 5 - a \\ x^2 = 1 - (4 - a) = -3 + a \end{matrix}\right.$.

$a < 4 \Rightarrow 5 - a > 0$, d'où une solution strictement positive $x = \sqrt{5 - a}$.

Une troisième solution strictement x positive est nécessaire, ce qui impose $-3 + a > 0$, soit $a > 3$.

La solution positive est alors $x = \sqrt{-3 + a}$.

Conclusion : L'équation proposée admet six solutions si et seulement si $a \in]3 ; 4[$.

Les solutions x sont $\{-\sqrt{5 + a} , -\sqrt{5 - a} , -\sqrt{-3 + a} , \sqrt{-3 + a} , \sqrt{5 - a} , \sqrt{5 + a}\}$.