Déterminer un polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $P(-1) = -18$ et que les restes de ses divisions par $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, soient tous égaux à 6 .

On déduit :

$P(x) = (x-1).Q_1(x) + 6$, avec $Q_1(x)$ un polynôme du second degré, d'où $P(1) = 6$.

$P(x) = (x-2).Q_2(x) + 6$, avec $Q_2(x)$ un polynôme du second degré, d'où $P(2) = 6$.

$P(x) = (x-3).Q_3(x) + 6$, avec $Q_3(x)$ un polynôme du second degré, d'où $P(3) = 6$.

L'énoncé équivaut aux quatre équations $\begin{cases} P(-1) = -18 \\ P(1) = 6 \\ P(2) = 6 \\ P(3) = 6 \end{cases}$.

$$\left\{\begin{array}{c} P(-1) = -18 \\ P(1) = 6 \\ P(2) = 6 \\ P(3) = 6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{cases} -a + b - c + d = -18 \\ a + b + c + d = 6 \\ 8a + 4b + 2c + d = 6 \\ 27a + 9b + 3c + d = 6 \end{cases} .$$

$(2) - (1) \Rightarrow 2a + 2c = 24$, soit $c = 12 - a$.

En reportant dans (2) , on obtient : $a + b + c + d = a + b + (12 - a) + d = 6 \Leftrightarrow b + d = -6$, soit $d = -6 - b$.

Le report de $\left\{\begin{array}{l} c = 12 - a \\ d = -6 - b \end{array}\right\}$ dans (3) et (4) donne $\begin{cases} 8a + 4b + 24 - 2a - 6 - b = 6 \Leftrightarrow 6a + 3b = -12 \\ 27a + 9b + 36 - 3a - 6 - d = 6 \Leftrightarrow 24a + 8b = -24 \end{cases}$.

D'où $\begin{array}{c} (1') \\ (2') \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2a + b = -4 \\ 3a + b = -3 \end{array}\right\}$. $(2') - (1') \Rightarrow a = +1$.

$2a + b = -4 \Leftrightarrow 2 + b = -4 \Leftrightarrow b = -6$, d'où $\begin{cases} c = 12 - a = +11 \\ d = -6 - b = 0 \end{cases}$.

On conclue : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$.