Solution – Arithmétique – Suites Numériques – s2495

Montrer qu'il n'existe pas trois nombre entiers distincts dont les carrés soient en suite arithmétique.

Soit $a < b < c$ entiers naturels, tels que (a^2, b^2, c^2) soient en suite arithmétique, <u>et que ce soit la suite arithmétique de plus petit premier terme a</u>. (Il n'en existe pas dont le terme a soit inférieur).

(a^2, b^2, c^2) soient en suite arithmétique $\Leftrightarrow$ $2b^2 = a^2 + c^2$.

$2b^2$ étant un nombre pair, cela impose a et c , soit simultanément pairs, soit simultanément impairs.

En effet, $a = 2k$ et $c = 2k' + 1$ $\Rightarrow$ $a^2 + c^2 = 4k^2 + 4k'^2 + 4k' = 1$, soit un nombre impair.

<u>a) $a = 2k$, $c = 2k'$, k et k' étant entiers naturels :</u>

$2b^2 = a^2 + c^2 = 4k^2 + 4k'^2 \Leftrightarrow b^2 = 2(k^2 + k'^2)$.

2 , nombre premier divisant $b^2 = b \times b$ doit diviser b , soit $b = 2b'$ avec b' entier naturel.

On déduit :

$b^2 = 2(k^2 + k'^2) \Leftrightarrow 4b'^2 = 2(k^2 + k'^2) \Leftrightarrow 2b'^2 = k^2 + k'^2$, soit (k^2, b'^2, k'^2) en suite arithmétique.

Comme $k < a$, cette situation est impossible, a étant la plus petite valeur pour laquelle ce soit possible.

<u>b) $a = 2k + 1$, $c = 2k' + 1$, k et k' étant entiers naturels :</u>

$2b^2 = a^2 + c^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 \Leftrightarrow b^2 = 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1)$.

2 , nombre premier divisant $b^2 = b \times b$ doit diviser b , soit $b = 2b'$ avec b' entier naturel.

On déduit :

$b^2 = 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1) \Leftrightarrow 4b'^2 = 2(2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1) \Leftrightarrow 2b'^2 = 2k^2 + 2k'^2 + 2k + 2k' + 1$.

Cette égalité entre un nombre pair et un nombre impair est impossible.

Conclusion : Il n'existe pas trois entiers naturels non nuls dont les carrés soient en suite arithmétique.