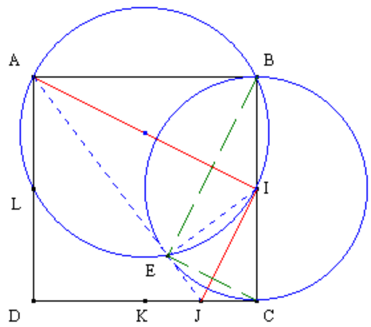
**Soit un carré $(ABCD)$, $I$ le milieu du côté $[BC]$, $J$ le point de $[CD]$ tel que $CJ = \frac{1}{4}CD$.**

**On travaillera dans le repère $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$.**

**1/ Démontrer que $(AI)$ est perpendiculaire à $(IJ)$ et que $IJ = \frac{AI}{2}$.**




$I(1\,;\frac{1}{2})$ et $J(\frac{3}{4}\,;1) \Rightarrow \vec{AI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. D'où $\vec{AI}.\vec{IJ} = aa'+bb' = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0$, ce qui prouve que les droites $(AI)$ et $(IJ)$ sont perpendiculaires.

$\|\vec{AI}\| = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\|\vec{IJ}\| = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, d'où $IJ = \frac{AI}{2}$.

**2-a) Déterminer des équations des cercles de diamètres $[AI]$ et $[BC]$.**

Tout point $M(x\,;y)$ du cercle de diamètre $[AI]$ vérifie : $\vec{MA}.\vec{MI} = 0$ avec $\vec{MA}\begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}$ et $\vec{MI}\begin{pmatrix}1-x\\ \frac{1}{2}-y\end{pmatrix}$.

$\vec{MA}.\vec{MI} = 0 \Leftrightarrow x(x-1) + y(y-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow C_1 \mid x^2 + y^2 - x - \frac{1}{2}y = 0$.

Tout point $M(x\,;y)$ du cercle de diamètre $[BC]$ vérifie : $\vec{MB}.\vec{MC} = 0$ avec $\vec{MB}\begin{pmatrix}1-x\\ -y\end{pmatrix}$ et $\vec{MC}\begin{pmatrix}1-x\\ 1-y\end{pmatrix}$.

$\vec{MB}.\vec{MC} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y(y-1) = 0 \Leftrightarrow C_2 \mid x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$.

**b) Soit $E$ l'intersection de ces deux cercles autre que $B$. Montrer que les points $(A, E, J)$ sont alignés.**

$M(x\,;y) \in C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-x-\frac{1}{2}y = 0 \\ x^2+y^2-2x-y+1 = 0 \end{cases}$ d'où : $x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ par soustraction, soit $y = -2(x-1)$.

On reporte dans $x^2+y^2-2x-y+1=0$. D'où : $x^2 + 4(x-1)^2 - 2x + 2(x-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 8x + 3 = 0$.

Les racines sont $\begin{cases} x_1 = +1\text{, d'où } y_1 = -2(x_1-1) = 0\text{. on retrouve } B(1\,;0) \\ x_2 = \frac{3}{5}\text{, d'où } y_2 = -2(x_2-1) = \frac{4}{5}\text{, d'où } E(\frac{3}{5}\,;\frac{4}{5}) \end{cases}$.

$\vec{AE}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{AJ}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ 1\end{pmatrix}$ vérifient $\vec{AE} = \frac{4}{5}\vec{AJ}$, d'où l'alignement attendu.