1/ Etablir que le produit de quatre nombres entiers consécutifs, augmenté de un, est le carré d'un nombre entier.

Soit $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ avec $x \in \mathbb{N}^*$.

Le développement de ce polynôme est $P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$.

$P(x)$ ne peut être le carré que d'un polynôme du second degré, de plus haut terme x^2, soit $Q(x) = x^2 + ax + b$.

$P(x) = [Q(x)]^2 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+ax+b)^2$.

D'où : $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2+2b^2)x^2 + 2abx + b^2$, $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$.

On *identifie* les polynômes , $\left\{\begin{matrix} 2a = 6 \\ a^2 + 2b^2 = 11 \\ 2ab = 6 \\ b^2 = 1 \end{matrix}\right\}$, dont on déduit $a = 3$ et $b = 1$, résultats compatibles avec chaque équation.

On conclue : $P(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2$.

2/ *Application* : Déterminer sans machine $\sqrt{14 \times 15 \times 16 \times 17 + 1}$ puis $\sqrt{2001 \times 2002 \times 2003 \times 2004 + 1}$.

a) en posant $x = 14$: $\sqrt{14 \times 15 \times 16 \times 17 + 1} = \sqrt{(14^2 + 3\times 14 + 1)^2} = \sqrt{239^2} = 239$.

b) en posant $x = 2001$: $\sqrt{2001 \times 2002 \times 2003 \times 2004 + 1} = \sqrt{(2001^2 + 3\times 2001 + 1)^2} = 4.010.005$.