Factoriser le polynôme $P(x) = 36x^3 - 12x^2 - 5x + 1$, sachant qu'il possède trois racines vérifiant : $x_1 = x_2 + x_3$.
(A moins de beaucoup de chance, il serait illusoire de chercher une racine évidente).

On cherche x_1, x_2, x_3 tels que : $P(x) = 36(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
En développant, on obtient : $P(x) = 36[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$.

D'où, après identification : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\dfrac{5}{36} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{1}{36} \end{cases}$.

En faisant valoir : $x_1 = x_2 + x_3$, on obtient : $x_1 + x_2 + x_3 = 2x_1 = \dfrac{1}{3}$, soit $x_1 = \dfrac{1}{6}$.

On déduit :

$\left\{ \begin{array}{c} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = x_1^2 + x_2x_3 = -\dfrac{5}{36} \Rightarrow x_2x_3 = -\dfrac{1}{6} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{1}{36} \Leftrightarrow x_2x_3 = -\dfrac{1}{6} \end{array} \right\}$. Le système devient $\begin{cases} x_2 + x_3 = \dfrac{1}{6} \\ x_2x_3 = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$.

Deux nombres α et β, solutions de $\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{array} \right\}$, sont les racines de $X^2 - Sx + P = 0$.

x_2 et x_3 sont les solutions de $X^2 - \dfrac{1}{6}X - \dfrac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 6X^2 - X - 1 = 0$, dont les solutions sont $\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

D'où : $P(x) = 36(x - \dfrac{1}{6})(x - \dfrac{1}{2})(x + \dfrac{1}{3}) = (6x - 1)(2x - 1)(3x + 1)$.