

Soit la suite (u_n) telle que $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1/ Déterminer l'écriture de u_n en fonction de n .

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1}{2^n}.$$

$$\begin{cases} u_n^2 - u_{n-1}^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \\ u_{n-1}^2 - u_{n-2}^2 = \frac{1}{2^{n-2}} \\ \dots\dots\dots \\ u_3^2 - u_2^2 = \frac{1}{2^2} \\ u_2^2 - u_1^2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

par addition, on obtient : $u_n^2 - u_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}.$

On retrouve la somme de $(n-1)$ termes d'une suite géométrique, de 1^{er} terme $\frac{1}{2}$, de raison $q = \frac{1}{2}$.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = v_1 \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\text{D'où : } u_n^2 - 1 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow u_n^2 = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = \sqrt{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}.$$

2/ Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0, \text{ on conclue : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}.$$