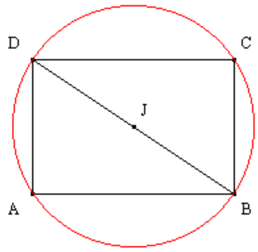
Soit un rectangle $(ABCD)$ tel que $AB = \sqrt{2}$ et $AD = 1$ tel que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD})$ soit $+\frac{\pi}{2}$.

Soit I le centre du rectangle.

Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que : $MB^2 + MD^2 = 3$.



Utilisons I comme origine :

$MB^2 + MD^2 = (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 + (\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IM})^2 = (\|\overrightarrow{IB}\|^2 - 2\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM} + \|\overrightarrow{IM}\|^2) + (\|\overrightarrow{ID}\|^2 - 2\,\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IM} + \|\overrightarrow{IM}\|^2)$.

I milieu de $[BD]$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IB}$ et $\|\overrightarrow{ID}\| = \|\overrightarrow{IB}\|$.

$MB^2 + MD^2 = 2IB^2 + 2IM^2 + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}).\overrightarrow{IM} = 2IB^2 + 2IM^2 = \frac{BD^2}{2} + 2IM^2$.

Comme $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2 + 1 = 3$, on déduit : $MB^2 + MD^2 = \frac{BD^2}{2} + 2IM^2 \Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2} + 2IM^2$.

$IM^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow IM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le lieu géométrique des points M est le cercle de centre I de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(On remarquera que $IB = ID = IA = IC = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Le lieu géométrique cherché est le cercle circonscrit au rectangle $(ABCD)$.