Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} > \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

$x^2+1>0$ et $x^2+4>0$, pour tout x réel. Donc l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

Le produit par $\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+4}$ ne change pas le sens de l'inéquation, qui est équivalente à :

$(x+1)\sqrt{x^2+4} > (x+2)\sqrt{x^2+1}$.

<u>a) Si $x \le -2$:</u> $x+2 \le 0$ et $x+1<0$. Les deux membres sont négatifs : $A<B<0 \Rightarrow A^2>B^2$.

$(x+1)\sqrt{x^2+4} > (x+2)\sqrt{x^2+1} \Rightarrow (x+2)^2(x^2+1) > (x+1)^2(x^2+4)$, soit :

$(x^2+4x+4)(x^2+1) > (x^2+2x+1)(x^2+4) \Leftrightarrow x^4+4x^3+5x^2+4x+4 > x^4+2x^3+5x^2+8x+4$

d'où : $2x^3-4x>0 \Leftrightarrow 2x(x^2-2)>0$. Or, $x\le -2 \Rightarrow 2x<0$ et $x^2 \ge 4 \Rightarrow x^2-2 \ge 0$,

soit $x^2 \ge 2 \Leftrightarrow x \le -\sqrt{2}$ ou $x \ge +\sqrt{2}$.

Comme $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, l'inéquation n'est pas vérifiée sur $]-\infty\,;-2]$, soit $\boldsymbol{S_1=\varnothing}$.

<u>b) Si $-2<x\le -1$:</u> $x+2>0$ et $x+1\le 0$, donc $(x+1)\sqrt{x^2+4}$ et $(x+2)\sqrt{x^2+1}$ ne seraient pas de même signe.

L'inéquation n'a pas de solution sur $]-2\,;-1]$, soit $\boldsymbol{S_2=\varnothing}$.

<u>c) Si $x>1$:</u> $x+2>0$ et $x+1>0$. Les deux membres sont positifs : $0<A<B \Rightarrow A^2<B^2$.

$(x+1)\sqrt{x^2+4} > (x+2)\sqrt{x^2+1} \Rightarrow (x+2)^2(x^2+1) < (x+1)^2(x^2+4)$, soit :

$2x^3-4x<0 \Leftrightarrow 2x(x^2-2)<0 \Leftrightarrow x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})<0$.

Comme $x+\sqrt{2}>0$ si $x>-1$, l'inéquation équivaut à : $x(x-\sqrt{2})<0 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{2}$.

L'inéquation est vérifiée sur $]0\,;\sqrt{2}\,[$, soit $S_3=]0\,;\sqrt{2}\,[$.

La solution globale est : $\boldsymbol{S=S_1\cup S_2\cup S_3=S_3=]0\,;\sqrt{2}\,[}$.