Démontrer que le polynôme $(x + a + b)^3 - (x^3 + a^3 + b^3)$ est divisible par $(a + b)(x + a)(x + b)$.

Soit $P(x) = (x + a + b)^3 - (x^3 + a^3 + b^3)$.

$P(-a) = b^3 - b^3 = 0$, ce qui prouve que $P(x)$ est divisible par $x + a$.

$P(-b) = a^3 - a^3 = 0$, ce qui prouve que $P(x)$ est divisible par $x + b$.

Dans le développement de $P(x)$ les termes en x^3 s'éliminent, ce qui laisse $P(x)$ du second degré.

On peut donc affirmer que $P(x) = k(x + a)(x + b)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

Il suffit alors d'identifier le terme constant des deux écritures de $P(x)$ pour déterminer k :

$P(x) = (x + a + b)^3 - (x^3 + a^3 + b^3)$ admet pour terme constant :

$(a + b)^3 - a^3 - b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a + b)$.

$P(x) = k(x + a)(x + b)$ admet pour terme constant : kab .

D'où : $kab = 3ab(a + b) \Rightarrow k = 3(a + b)$.

On conclue : $P(x) = (x + a + b)^3 - (x^3 + a^3 + b^3) = 3(a + b)(x + a)(x + b)$.