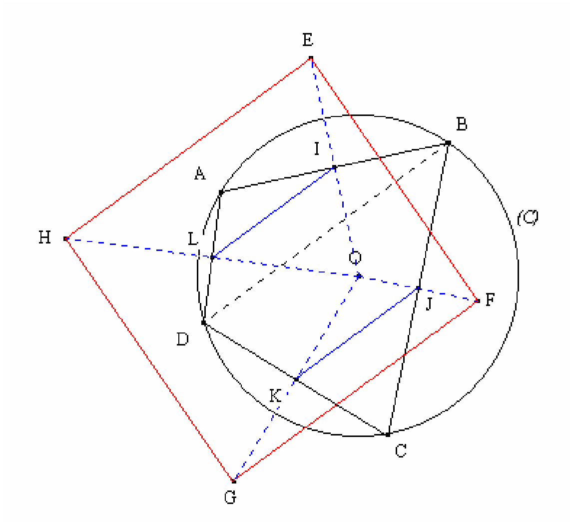
Soit un quadrilatère $(ABCD)$ inscriptible dans un cercle (C), de centre O.
Soient E, F, G, H les symétriques respectifs de O par rapport aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ de ce quadrilatère.

Montrer que le quadrilatère $(EFGH)$ est un parallélogramme.



Soient I, J, K, L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ du quadrilatère $(ABCD)$.
Ce quadrilatère étant inscriptible dans le cercle (C), les segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$ sont des rayons, donc sont égaux.
Dans le triangle isocèle (OAB), de sommet O, la médiane (OI) est également médiatrice du segment $[AB]$, donc le symétrique E de O par rapport à $[AB]$ est aligné avec les points O et I.

Un raisonnement identique prouve que (O, J, F), (O, K, G), (O, L, H) sont alignés.

En conséquence :
Dans le triangle (ABD), le segment $[IL]$ relie les milieux de côtés, donc est parallèle et égal à la moitié du troisième côté : $\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{IL}$.
De même :
Dans le triangle (OEH), le segment $[IL]$ relie les milieux de côtés, donc est parallèle et égal à la moitié du troisième côté : $\overrightarrow{EH} = 2\,\overrightarrow{IL}$.
On conclue : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BD}$.

Le même raisonnement, tenu pour les triangles (BDC) et (OFG) entraîne $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BD}$.
En conséquence : $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, ce qui prouve que le quadrilatère $(EFGH)$ est un parallélogramme.