**Trois joueurs, $A$, $B$, $C$, jouent à "pile ou face". $A$ et $B$ jouent la première partie, puis $C$ remplace le perdant.**

**Le jeu se poursuit ainsi : Chaque joueur perdant d'une partie laisse sa place au troisième joueur.**

**Dans ce jeu, les évènements $\{P\}$ et $\{F\}$ sont équiprobables.**

**1/ Représenter les diverses situations à l'aide d'un arbre représentant les résultats des quatre premières parties.**

Le plus simple est de noter pour chaque partie le nom du joueur qui ne participe pas.

C

↙ ↘

A B

↙ ↘ ↙ ↘

B C A C

↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

A C A B B C A B

↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

B C A B B C A C A C A B B C A C

**2/ Quel est le nombre de branches de l'arbre après $n$ parties.**

Après 1 partie : $2 = 2^1$ ; Après 2 parties : $4 = 2^2$ …. ; Après $n$ parties l'arbre contient $2^n$ branches.

**3/ On décide que le vainqueur du jeu est celui des trois joueurs qui, le premier, a gagné deux parties consécutives.**

**Calculer, pour chaque joueur, la probabilité de gagner le jeu :**

**- Après 2 parties :**

Chaque joueur a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner une partie.

$A$ et $B$ ont même probabilité : $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. (Branche $(C\text{-}BC)$ pour $A$ et $(C\text{-}AB)$ pour $B$ )

$C$ ne participant pas à la 1ère partie, ne peut gagner en 2 parties : $p(C) = 0$ .

**- Après 3 parties :**

$A$ et $B$ ne peuvent gagner en trois parties, puisqu'ils devraient avoir perdu la 1ère, donc ne participeraient pas à la seconde : $p(A) = p(B) = 0$ .

$C$ le peut, en gagnant les 2ème et 3ème partie :

$p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. (Branche $(C\text{-}ABA)$ ou $(C\text{-}BAB)$ , donc 2 cas sur 8 , soit $\frac{1}{4}$ )

**- Après 4 parties :**

Il faut participer à la 3ème partie, sans avoir gagné la seconde, puis gagner les 3ème et 4ème parties.

Donc $A$ ou $B$ doivent avoir perdu la 1ère , gagné les 3ème et 4ème : $p(A) = p(B) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ .

(Branche $(C\text{-}ABCB)$ ou $(C\text{-}ACBC)$ , pour $A$ , donc 2 cas sur 16 , soit $\frac{1}{8}$ )

(Branche $(C\text{-}BACA)$ ou $(C\text{-}BCAB)$ , pour $B$ , donc 2 cas sur 16 , soit $\frac{1}{8}$ )

$C$ ne peut gagner en 4 parties, puisque, sachant qu'il ne participe pas à la 1ère partie :

S'il gagne la 2ème et perd la 3ème , il ne participe pas à la 4ème ,

S'il perd la 2ème , il ne participe pas à la 3ème , donc, $p(C) = 0$ .