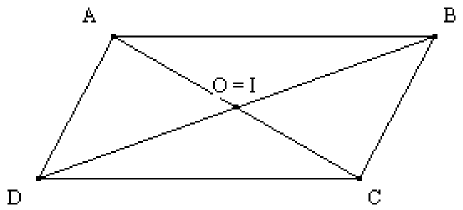
Soit un parallélogramme ($ABCD$) .



1/ Prouver que les deux diagonales du parallélogramme ont même milieu O .

Soit O le milieu de $[AC]$ et I celui de $[BD]$.

O milieu de $[AC]$ $\Leftrightarrow$ $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$.

I milieu de $[BD]$ $\Leftrightarrow$ $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, on déduit $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On conclue $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AI}$, donc les points O et I sont confondus.

2/ Prouver que la somme des carrés des diagonales est égal au double de la somme des carrés de deux côtés consécutifs du parallélogramme.

$AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

$BD^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB^2 + BC^2 – 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

On déduit $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.