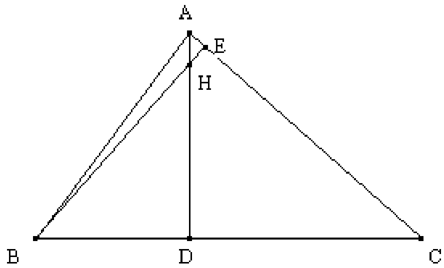
Soit un triangle (ABC) tel que D et E soient les pieds des hauteurs respectivement issues de A et B, et H son orthocentre.



1 – a) Montrer que les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{EBC}$ sont égaux.

Dans le triangle rectangle (ADC), on a $\widehat{CAD} + \widehat{DAC} = 90°$, soit $\widehat{CAD} + \widehat{ACB} = 90°$.

Dans le triangle rectangle (EBC), on a $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = 90°$, soit $\widehat{EBC} + \widehat{ACB} = 90°$.

$\widehat{CAD} + \widehat{ACB} = \widehat{EBC} + \widehat{ACB} \iff \widehat{CAD} = \widehat{EBC}$.

b) Montrer que les triangles (ADC) et (BDH) sont semblables.

Des triangles *semblables* sont aussi dits *homothétiques* ou *proportionnels*.

Deux triangles qui ont deux angles respectivement égaux ont leur troisième angle égal, la somme des trois angles d'un triangle étant $180°$.

Les trois angles étant égaux, ils ont même forme, donc sont semblables.

Les triangles (ADC) et (BDH) sont rectangles en D.

$\widehat{CAD} = \widehat{EBC}$, soit $\widehat{CAD} = \widehat{HBD}$, donc les deux triangles ont un deuxième angle égal, et sont *semblables*.

c) En déduire que $DA \times DH = BD \times DC$.

Deux triangles *semblables* sont *proportionnels* : $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DH} \iff DA \times DH = BD \times DC$, après produit en croix.

2 – a) Montrer que les triangles (ADC) et (AEH) sont semblables.

Les triangles rectangles (ADC) et (AEH) ont un angle droit en D et en E, et un angle commun $\widehat{A}$.

Possédant deux angles égaux deux à deux, ces triangles sont semblables.

b) En déduire que $AD \times AH = AC \times AE$.

Ces triangles étant proportionnels, on déduit : $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AH} \iff AD \times AH = AC \times AE$.