Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs du paramètres m $\begin{cases} a+b-c+2d=1 \\ a+2b-3c-d=0 \\ -a+b-3c-9d=2 \\ a-2b+5c+13d=m+4 \end{cases}$ **.**

Résolvons $(a\,;b\,;c)$, en fonction de d dans les 3 premières lignes du systèmes :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a+b-c=1-2d \\ a+2b-3c=d \\ -a+b-3c=2+9d \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} L'_1=L_1 \\ L'_2=L_1-L_2 \\ L'_3=L_1+L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a+b-c=1-2d \\ -b+2c=1-3d \\ 2b-4c=3+7d \end{array}\right\}.$$

On remarquera que les premiers membres de L'_2 et L'_3 sont multiples : $\begin{array}{r} L''_1=L'_1 \\ L''_2=-2L'_2 \\ L''_3=L'_3 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a+b-c=1-2d \\ 2b-4c=-2+6d \\ 2b-4c=3+7d \end{array}\right\}.$

Deux cas sont à envisager :

a) $3+7d \neq -2+6d$, soit $d \neq -5$,

Les lignes L''_2 et L''_3 sont incompatibles. Il n'existe pas de solution $(a\,;b\,;c\,;d)$ au système.

b) $3+7d = -2+6d$, soit $d = -5$,

Le système précédent se résume aux deux lignes $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a+b-c=11 \\ b-2c=-16 \end{array}\right\}.$

La 4$^{\text{ème}}$ ligne du système initial, non encore utilisée devient : $a-2b+5c=m+69$, que l'on nomme L_0.

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a-2b+5c=m+69 \\ a+b-c=11 \\ b-2c=-16 \end{array}\right\} \begin{array}{r} L'_0=L_0 \\ L'_1=L_0-L_1 \\ L'_2=L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a-2b+5c=m+69 \\ -3b+6c=m+58 \\ b-2c=-16 \end{array}\right\}.$$

On remarquera que les premiers membres de L'_1 et L'_2 sont multiples : $\begin{array}{r} L''_0=L'_0 \\ L''_1=L'_1 \\ L''_2=-3L'_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a-2b+5c=m+69 \\ -3b+6c=m+58 \\ -3b+6c=48 \end{array}\right\}.$

Deux sous-cas sont à envisager :

b – α) $m+58 \neq 48$, soit $m \neq -10$,

Les lignes L''_1 et L''_2 sont incompatibles. Il n'existe pas de solution $(a\,;b\,;c\,;\mathbf{-5})$ au système.

b – β) $m+58 = 48$, soit $m=-10$,

Le système précédent se résume aux deux lignes $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a-2b+5c=59 \\ b-2c=-16 \end{array}\right\}.$

Prenons c comme paramètre $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{c} a-2b=-5c+59 \\ b=2c-16 \end{array}\right\}$, d'où $a=2b-5c+59=-c+27$.

Les quadruplets solutions sont $(-c+27\,;2c-16\,;c\,;-5)$, pour tout c réel.

***Résumé* :**

- **Si $m \neq -10$, aucun quadruplet $(a\,;b\,;c\,;d)$ solution;**
- **Si $m = -10$, infinité de quadruplets solutions : $(a\,;b\,;c\,;d) = (-c+27\,;2c-16\,;c\,;-5)$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.**