

Deux véhicules partent d'une ville A , l'un à 9h00, l'autre à 9h30, vers une ville B distante de 130 km. Un autre véhicule, parti de B à 8h00, rencontre le premier à 88 km de B et le second à 106 km de B . La vitesse des deux véhicules partis de A est constante et identique, égale à v , et celle du véhicule parti de B , constante, égale à v' .

Quelle est la vitesse de chaque véhicule ?

Prenons pour origine de temps 9h30, avec l'heure pour unité, et la ville A pour origine des distances, avec le kilomètre pour unité, le sens positif étant choisi de A vers B .

Equation horaire de la voiture A_1 :

Partie à 9h00, soit à l'instant $-0,5$ h, à la position 0, à la vitesse $+v$, son équation horaire à l'instant t est :

$$x_1 = v(t + 0,5)$$

Equation horaire de la voiture A_2 :

Partie à 9h30, soit à l'instant 0, à la position 0, à la vitesse $+v$, son équation horaire à l'instant t est :

$$x_2 = vt$$

Equation horaire de la voiture B_1 :

Partie à 8h00, soit à l'instant $-1,5$, à la position 0, à la vitesse $-v'$, son équation horaire à l'instant t est :

$$x_3 = 130 - v'(t + 1,5).$$

Soit t_1 l'instant de rencontre de A_1 et B_1 :

B_1 ayant parcouru 88 km sur 130, sa position ainsi que celle de A_1 est +42.

$$\left\{ \begin{array}{l} vt_1 + 0,5 = 42 \\ 130 - v'(t_1 + 1,5) = 42 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} vt_1 + 0,5 = 42 \\ v'(t_1 + 1,5) = 88 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{42}{v} - 0,5 \\ t_1 = \frac{88}{v'} - 1,5 \end{array} \right\}$$

$$\frac{42}{v} - 0,5 = \frac{88}{v'} - 1,5 \Leftrightarrow \frac{88}{v'} - \frac{42}{v} = 1, \text{ soit en posant } V = \frac{1}{v} \text{ et } V' = \frac{1}{v'} : 88V' - 42V = 1 \Leftrightarrow 44V' - 21V = 0,5.$$

Soit t_2 l'instant de rencontre de A_2 et B_1 :

B_1 ayant parcouru 106 km sur 130, sa position ainsi que celle de A_2 est +24.

$$\left\{ \begin{array}{l} vt_2 = 24 \\ 130 - v'(t_2 + 1,5) = 24 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} vt_2 = 24 \\ v'(t_2 + 1,5) = 106 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_2 = \frac{24}{v} \\ t_2 = \frac{106}{v'} - 1,5 \end{array} \right\}$$

$$\frac{106}{v'} - 1,5 = \frac{24}{v} \Leftrightarrow \frac{106}{v'} - \frac{24}{v} = 1,5 \Leftrightarrow 106V' - 24V = 1,5.$$

$$\begin{array}{l} L_1 \{ 44V' - 21V = 0,5 \} \\ L_2 \{ 106V' - 24V = 1,5 \} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -8L_1 \{ -352V' + 168V = -4 \} \\ 7L_2 \{ 742V' - 168V = 10,5 \} \end{array} \Rightarrow 390V' = 6,5, \text{ soit } V' = \frac{6,5}{390}.$$

$$v' = \frac{1}{V'} = \frac{390}{6,5} = \frac{780}{13} \Rightarrow v' = 60 \text{ km/h}.$$

$$\text{En reportant dans } \frac{88}{v'} - \frac{42}{v} = 1 : \frac{88}{60} - \frac{42}{v} = 1 \Leftrightarrow \frac{42}{v} = \frac{28}{60} \Leftrightarrow v = \frac{42 \times 60}{28} \Leftrightarrow v = 90 \text{ km/h}.$$