Soit la suite numérique $\{u_n\}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

1/ Montrer que $\{u_n\}$ est une suite à termes tous positifs.

<u>*Rapidement :*</u> Le premier terme u_0 est positif, or la formule de récurrence ne comporte que des sommes et des rapports, ce qui ne peut construire que des nombres positifs u_n à partir de u_0 .

<u>*Par récurrence :*</u> Soit la relation de récurrence P_n : « $u_n \geq 0$ » .

- 1) P_0 est vérifiée puisque $u_0 = 1 \geq 0$.

- 2) Supposons P_n vérifiée ($u_n \geq 0$) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($u_{n+1} \geq 0$) ?

$u_n \geq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 5u_n \geq 0 \\ 3u_n + 5 \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} \geq 0$.

- 3) On conclue que P_n est vérifiée pour tout $n \geq 0$ ($u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

2-a) Montrer que la suite $\{u_n\}$ est décroissante.

Une suite est décroissante si et seulement si $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout n entier naturel.

<u>*Méthode rapide :*</u>

Lorsque la suite est à *termes positifs* , une division par u_n ne modifie pas le signe de l'expression :

$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Or : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5}{3u_n + 5} < 1$ puisque son dénominateur $5 + 3u_n$ est supérieur à son numérateur 5 .

<u>*Méthode classique :*</u>

Soit la relation de récurrence P_n :| « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ » .

- 1) $u_1 = \dfrac{5u_0}{3u_0 + 5} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow u_1 - u_0 = \dfrac{5}{8} - 1 = -\dfrac{3}{8} < 0$. Donc P_0 est vérifiée.

- 2) Supposons P_n vérifiée ($u_{n+1} - u_n \leq 0$) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$) ?

$u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{5u_{n+1}}{3u_{n+1} + 5} - \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} = \dfrac{5u_{n+1}(3u_n + 5) - 5u_n(3u_{n+1} + 5)}{(3u_{n+1} + 5)(3u_n + 5)} = \dfrac{25(u_{n+1} - u_n)}{(3u_{n+1} + 5)(3u_n + 5)}$.

Le dénominateur étant positif, puisque la suite est à termes positifs, on déduit que $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ sont de même signe : $u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$, soit P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie .

- 3) On conclue que P_n est vérifiée pour tout $n \geq 0$ ($u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

b) En déduire la convergence de la suite, et déterminer sa limite.

<u>Une suite numérique décroissante, à termes positifs, est convergente</u>.

Soit $l = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$. Passons la relation de récurrence à sa limite : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$ devient $l = \dfrac{5l}{3l + 5}$.

$3l^2 + 5l = 5l \Rightarrow 3l^2 = 0 \Rightarrow l = \lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

3/ On introduit la suite $\{v_n\}$ telle que $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

a) Montrer que la suite $\{v_n\}$ est arithmétique.

Une suite est arithmétique si et seulement si la différence de deux termes consécutifs est constante :

$\{v_n\}$ arithmétique $\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = r = C^{te}$.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{5}{u_{n+1}} - \dfrac{5}{u_n} = \dfrac{5}{\dfrac{5u_n}{3u_n + 5}} - \dfrac{5}{u_n} = \dfrac{3u_n + 5}{u_n} - \dfrac{5}{u_n} = 3 + \dfrac{5}{u_n} - \dfrac{5}{u_n} = 3$, pour tout n entier naturel.

$v_{n+1} = v_n + 3$. La suite $\{v_n\}$ est arithmétique, de raison $r = 3$.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n .

On déduit $v_n = v_0 + n.r = \dfrac{5}{u_0} + n.r = 5 + 3n$, soit $v_n = 3n + 5$, pour tout n entier naturel.

$v_n = \dfrac{5}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{5}{v_n}$, soit $u_n = \dfrac{5}{3n + 5}$, pour tout n entier naturel.

c) Retrouver la limite prévue au 2-b).

On constate bien que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5}{3n + 5} = 0$.