Résoudre et discuter le système suivant, selon les valeurs réelles de m $\begin{cases} y + (m-5)x = -m \\ y - 2(m+1)x = -3m+1 \end{cases}$.

Un système paramétrique est une *famille* de systèmes se déduisant d'une écriture commune, selon la valeur du *paramètre m* .

m est un paramètre : Ainsi, pour $m = 2$, le système devient $\begin{cases} y - 3x = -2 \\ y - 6x = -5 \end{cases}$, noté S_2 (système $m = 2$).

x et y sont les *inconnues* de ce système.

Donc, pour conclure : 1/ le paramètre m détermine le système à résoudre,

2/ ensuite, x et y sont les inconnues à trouver.

Dans la 1ère ligne L_1 : $y = -(m-5)x - m$,

Dans la 2ème ligne L_2 : $y = 2(m+1)x - 3m + 1$.

En égalant : $2(m+1)x - 3m + 1 = -(m-5)x - m \Leftrightarrow (3m-3)x = 2m - 1$.

Cas particulier : $m = 1$

On obtient $0x = 1$, qui n'admet pas de solution.

Le système S_1 de la famille n'admet pas de couple solution $(x ; y)$.

Cela signifie que pour $m = 1$, les droites affines correspondant aux deux lignes du système sont strictement parallèles : $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$.

Cas général : $m \neq 1$

$(3m-3)x = 2m - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2m-1}{3(m-1)}$, que l'on reporte dans : $y = -(m-5)x - m$,

$$y = \frac{-(m-5)(2m-1)}{3(m-1)} - m = \frac{-(2m^2 - m - 10m + 5) - (3m^2 - 3m)}{3(m-1)} = \frac{-5m^2 + 14m - 5}{3(m-1)}.$$

Pour $m \neq 1$, le système S_m admet un couple solution unique $(x ; y) = \left(\dfrac{2m-1}{3(m-1)} ; \dfrac{-5m^2 + 14m - 5}{3(m-1)} \right)$.

Cela signifie que pour $m \neq 1$, les droites affines correspondant aux deux lignes du système sont concourantes en un point $M\left(\dfrac{2m-1}{3(m-1)} ; \dfrac{-5m^2 + 14m - 5}{3(m-1)} \right)$.

Ainsi, pour $S_2 \begin{cases} y - 3x = -2 \\ y - 6x = -5 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 6x - 5 \end{cases}$, le point d'intersection est $M\left(\dfrac{2m-1}{3(m-1)} ; \dfrac{-5m^2 + 14m - 5}{3(m-1)} \right)$, soit en reportant $m = 2$: $M(1 ; 1)$, ce qui est aisé à vérifier.