Solution – Polynômes – s2028

Déterminer l'ensemble des polynômes $P(x)$ tels que : $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$, pour tout x réel.

Si $P(x)$ est de degré n , alors $\left\{\begin{array}{c} P(x^2) \text{ est de degré } 2n \\ (1+x^2)P(x) \text{ est de degré } n+2 \end{array}\right\}$, ce qui impose $2n = n + 2$, soit $n = 2$.

On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$.

$\left\{\begin{array}{c} P(x^2) = ax^4 + bx^2 + c \\ (1+x^2)P(x) = (1+x^2)(ax^2+bx+c) = ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c \end{array}\right\}$. On *identifie* ces polynômes, qui ont donc le même coefficient pour chacune de leurs puissances :

$$\left\{\begin{array}{c} a = a \\ b = 0 \\ a + c = b \\ b = 0 \\ c = c \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ quelconque , } b = 0 \text{ , } c = -a \text{ .}$$

Les polynômes cherchés sont de la forme $P(x) = ax^2 - a = a(x^2 - 1)$.

Vérification :

$$\left\{\begin{array}{l} P(x^2) = a(x^4 - 1) \\ (1+x^2)P(x) = a(x^2+1)(x^2-1) = a(x^4-1) \end{array}\right. .$$