Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ **.**

a) Faire l'étude et tracer le graphe (C) de la fonction.

1/ Domaine - Continuité - Dérivabilité - Parité

$f(x)$ est calculable si et seulement si $x^2 + x + 1 \neq 0$. Comme $\Delta = b^2 - 4ac = -3$, ce polynôme n'est jamais nul et f est définie pour tout nombre réel.

f est continue et dérivable sur R comme tout rapport de polynômes sur son domaine de définition.

$f(1) = 2/3$ tandis que $f(-1) = 0$, ce qui prouve que f n'est ni paire, ni impaire.

2/ Limites aux bornes du domaine

Tout rapport de polynômes se comporte aux infinis comme le rapport de ses plus hauts degrés : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Le graphe admet pour *asymptote horizontale* $D \mid y = 0$.

3/ Intersections avec les axes de coordonnées

$M(x\,;y) \in (C) \cap x'x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = f(x) \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc $(C) \cap x'x = \{ A\ (-1\,;0)\ \}$.

$M(x\,;y) \in (C) \cap y'y \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = f(x) \\ x = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow y = f(0) \Leftrightarrow y = +1$. Donc $(C) \cap y'y = \{ B\ (0\,;+1)\ \}$.

4/ Dérivée - Recherche des extrema - Signe de la dérivée

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. Donc $f'(x) = \dfrac{(x^2+x+1)-(2x+1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x\,(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $x = -2$.

$y = f(0) = +1$ tandis que $y = f(-2) = -1/3$. Les extrema sont $E(-2\,;-1/3)$ et $B\,(0\,;1)$.

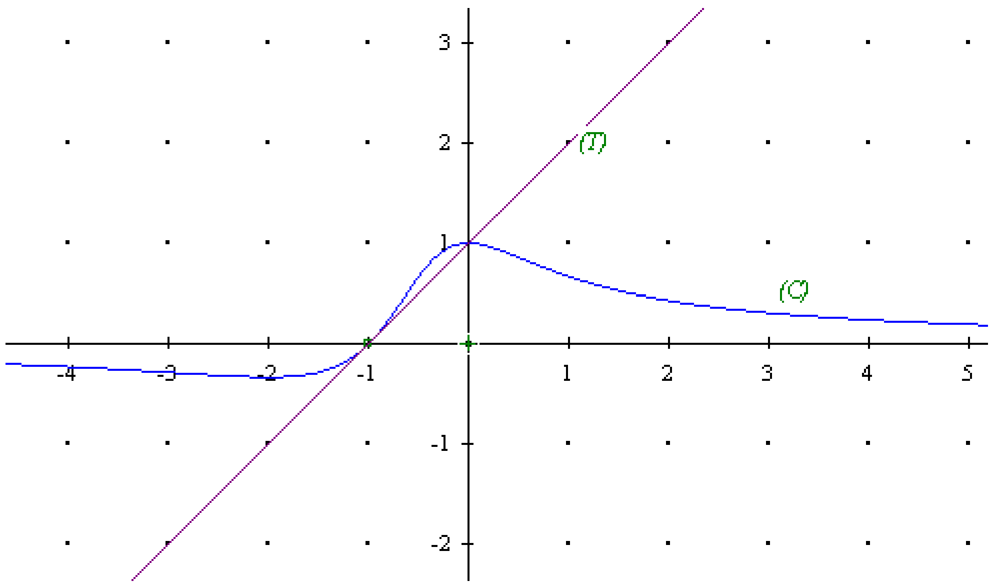
Le signe de la dérivée est identique à celui du produit $-x(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		+	|	+	0	-	
$x+2$		-	0	+	|	+	
$-x(x+2)$		-	0	+	0	-	

5/ Tableau de Variation

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	|	+	0	-	
$f(x)$	0^-	↘	$-1/3$	↗	0	↗	$+1$	↘	0^+

6/ Tracé du Graphe (C)



b) Déterminer l'équation de la tangente (T) au graphe, en son point d'abscisse $x_0 = -1$.

Soit $T \mid y = ax + b$. Son coefficient directeur a est égal à $f'(-1) = +1$. L'équation devient $T \mid y = x + b$.

La tangente (T) doit passer par le point du graphe $A(-1\,;\,0)$, d'où $0 = -1 + b \Leftrightarrow b = +1$.

La tangente recherchée est $T \mid y = x + 1$.