1/ Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ nulle pour $x = 1$.

$u = x^2 + x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 1$.

On sait que les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sont de la forme $\ln |u| + C^{te}$. D'où : $F_k(x) = \ln | x^2 + x + 1 | + k$.

$x^2 + x + 1$ admet un discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$, donc ce trinôme est strictement positif, pour tout x réel.

On peut donc écrire $F_k(x) = \ln (x^2 + x + 1) + k$.

Imposons $F_k(1) = 0$, soit $\ln 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -\ln 3$.

La primitive cherchée est $F(x) = \ln (x^2 + x + 1) - \ln 3 = \ln \dfrac{x^2 + x + 1}{3}$.

2/ Déterminer la primitive de $g(x) = \dfrac{x - 1}{x} + \dfrac{x}{x - 1}$ nulle en $x = 2$.

(il est judicieux d'écrire le premier terme sous la forme $a + \dfrac{b}{x}$, et le second $a' + \dfrac{b'}{x - 1}$).

$g(x) = \dfrac{x - 1}{x} + \dfrac{(x - 1) + 1}{x - 1} = 1 - \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{1}{x - 1} = 2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1}$.

On sait que les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sont de la forme $\ln |u| + C^{te}$. D'où :

$G_k(x) = 2x - \ln | x | + \ln | x - 1 | + k = 2x + \ln \left| \dfrac{x - 1}{x} \right| + k$.

Imposons $G_k(2) = 0$, soit $4 + \ln \dfrac{1}{2} + k = 0 \Leftrightarrow 4 - \ln 2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -4 + \ln 2$.

La primitive cherchée est $G(x) = 2x + \ln \left| \dfrac{x - 1}{x} \right| + \ln 2 - 4 = 2x - 4 + \ln \left| \dfrac{2(x - 1)}{x} \right|$.