Soit la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$.

1/ Calculer z_1 , z_2 , z_3 . En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique.

$z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z_0 = 2(-1 + i\sqrt{3})$.

$z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z_1 = (-1 + i\sqrt{3})^2 = (1 - 2i\sqrt{3} - 3) = -2(1 + i\sqrt{3})$.

$z_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z_2 = -(-1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = -(i\sqrt{3} + 1)(i\sqrt{3} - 1) = -[(i\sqrt{3})^2 - 1^2] = -(-3 - 1) = 4$.

On constate que $z_3 = z_0$, ce qui permet de conclure que $z_4 = z_1$; $z_5 = z_2$; $z_6 = z_0$, $z_7 = z_1$ …..

La suite est périodique, de cycle 3 : $z_{n+3} = z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2/ Exprimer, suivant les valeurs de n , l'écriture trigonométrique de z_n .

$z_0 = 4 = [4 \,;\, 0] = 4^{ei0} = z_4 = z_8 \ \dots \Rightarrow z_{3k} = 4e^{i0}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$z_1 = 2(-1 + i\sqrt{3}) = 4(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = [2 \,;\, \dfrac{2\pi}{3}] = 2e^{2i\pi/3} = z_5 = z_9 \ \dots \Rightarrow z_{3k+1} = 2e^{2i\pi/3} = 2j$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$z_2 = 2(-1 - i\sqrt{3}) = 4(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = [2 \,;\, -\dfrac{2\pi}{3}] = 2e^{-2i\pi/3} = z_6 = z_{10} \ \dots \Rightarrow z_{3k+2} = 2e^{-2i\pi/3} = 2\,\overline{j}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.