Soient a et b deux entiers naturels.

Montrer que $N = ab(a^2 - b^2)$ est toujours divisible par 3 .

Approche théorique :

Soit $a = 3k + r$ et $3k' + r$, avec k , k' entiers et les restes r , r' compris entre 0 et 2 .

$N = ab(a + b)(a - b) = (3k + r)(3k' + r')[3(k + k') + (r + r')][3(k - k') + (r - r')]$

$N = (3k + r)(3k' + r')[9(k^2 - k'^2) + 3(k - k')(r + r') + 3(k + k')(r - r') + (r^2 - r'^2)]$

$N = (3k + r)(3k' + r')[(3K + (r^2 - r'^2)]$ en regroupant les multiples entiers de 3 .

$N = (9kk' + 3kr' + 3kr + rr')\ [(3K + (r^2 - r'^2)] = (3K' + rr')\ [(3K + (r^2 - r'^2)]$

$N = 9KK' + 3K'\ (r^2 - r'^2) + 3Krr' + rr'(r^2 - r'^2) = 3K'' + rr'(r^2 - r'^2)$.

On constate que seuls les restes r , r' déterminent le reste du résultat (ce qui explique l'utilisation plus rapide des congruences modulo 3).

$r = 0$, $r' = 0 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$

$r = 0$, $r' = 1 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$

$r = 0$, $r' = 2 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$

$r = 1$, $r' = 0 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$

$r = 1$, $r' = 1 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$

$r = 1$, $r' = 2 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = -3$ reste 0

$r = 2$, $r' = 0 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$

$r = 2$, $r' = 1 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 3$ reste 0

$r = 2$, $r' = 2 \Rightarrow rr'(r - r')(r + r') = 0$.

N est bien multiple de 3 , quelles que soient les valeurs de a et b .

Méthode plus rapide **:**

- Si $a \equiv 0[3]$ ou $b \equiv 0[3]$, alors $N = ab(a^2 - b^2) \equiv 0[3]$.
- Si $a \equiv 1[3]$ et $b \equiv 1[3]$, alors $a - b \equiv 0[3] \Rightarrow N = ab(a - b)(a + b) \equiv 0[3]$.
- Si $a \equiv 1[3]$ et $b \equiv 2[3]$, alors $a + b \equiv 3[3]$, soit
- $a + b \equiv 0[3] \Rightarrow N = ab(a - b)(a + b) \equiv 0[3]$.
- Si $a \equiv 2[3]$ et $b \equiv 1[3]$, alors $a + b \equiv 3[3]$, soit $a + b \equiv 0[3] \Rightarrow N = ab(a - b)(a + b) \equiv 0[3]$.
- Si $a \equiv 2[3]$ et $b \equiv 2[3]$, alors $a - b \equiv 0[3] \Rightarrow N = ab(a - b)(a + b) \equiv 0[3]$.

Encore plus rapide **:**

$a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1).a.(a + 1)$, produit de trois entiers consécutifs, donc multiple de 3 :

$a^3 - a \equiv 0[3] \Leftrightarrow a^3 \equiv a[3]$, d'où $a^3b \equiv ab[3]$ et de même $b^3 - b \equiv 0[3] \Leftrightarrow b^3 \equiv b[3]$ et $b^3a \equiv ba[3]$.

$N = ab(a^2 - b^2) = ba^3 - ab^3$, or $ba^3 - ab^3 \equiv ab - ba\ [3]$, soit $N \equiv 0[3]$, quels que soient a et b .