Lors d'un examen, le jury procède au tirage au sort, de façon aléatoire, de 4 sujets parmi 20 qui sont au programme.

Un élève reconnaît n'avoir appris que 10 sujets parmi les 20 du programme.

On note X le nombre des sujets tirés que connaît l'élève.

1/ Quelle est la loi de probabilité de X ?

La loi de probabilité est un tableau de correspondance entre les valeurs (x_i) des valeurs du caractère étudié X (variable aléatoire) et les valeurs (p_i) des probabilités correspondantes.

L'élève connaît de 0 à 4 des sujets tirés :

$X = 0$: (0 sujet parmi les 10 sus , 4 parmi les 10 non sus) , $p(X = 0) = \dfrac{\binom{10}{0} \times \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{14}{323}$.

$X = 1$: (1 sujets parmi les 10 sus , 3 parmi les 10 non sus) , $p(X = 1) = \dfrac{\binom{10}{1} \times \binom{10}{3}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{80}{323}$.

$X = 2$: (2 sujets parmi les 10 sus , 2 parmi les 10 non sus) , $p(X = 2) = \dfrac{\binom{10}{2} \times \binom{10}{1}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{135}{323}$.

$X = 3$: (3 sujets parmi les 10 sus , 1 parmi les 10 non sus) , $p(X = 3) = \dfrac{\binom{10}{3} \times \binom{10}{1}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{80}{323}$.

$X = 4$: (4 sujets parmi les 10 sus , 0 parmi les 10 non sus) , $p(X = 4) = \dfrac{\binom{10}{4} \times \binom{10}{0}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{14}{323}$.

Voir tableau le 1 ci-dessous.

2/ Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

L'espérance mathématique (moyenne arithmétique) est une notion identique à celle du barycentre d'un système de points pondérés. G barycentre de $\{A_i ; a_i\}_{i\in\{1 ; n\}}$ correspond à $E(X) = \overline{X}$ espérance de $\{x_i ; p_i\}_{i\in\{1 ; n\}}$.

$E(X) = \overline{X} = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i$. Voir le tableau 2 .

X	$p(X)$
0	14/323
1	80/323
2	135/323
3	80/323
4	14/323
	$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$

X	$p(X)$	$Xp(X)$
0	14/323	0
1	80/323	80/323
2	135/323	270/323
3	80/323	240/323
4	14/323	56/323
	$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$	$E(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i X_i = 2$

En moyenne, l'élève tire au sort 2 sujets connus parmi les 4 proposés, ce qui paraît logique, puisqu'il connaît 10 thèmes sur les 20 possibles.

Explication par la loi des grands nombres **:**

L'espérance mathématique trouve sa pleine signification par la loi des grands nombres.

- Un candidat unique peut connaître 0 comme 1, 2, 3, 4 des sujets proposés.
- Au total, 10 candidats connaîtront en moyenne 20 des 40 sujets proposés, avec une erreur *absolue* de 8 sujets (par exemple) : Erreur absolue = 8 , Erreur relative = $\frac{8}{40}$= 0,20.
- 100 candidats connaîtront en moyenne 200 des 400 sujets proposés, avec une erreur *absolue* de 40 sujets (par exemple) : Erreur absolue = 40 , Erreur relative = $\frac{40}{400}$= 0,10.
- 1000 candidats connaîtront en moyenne 2000 des 4000 sujets proposés, avec une erreur *absolue* de 100 sujets (par exemple) : Erreur absolue = 100 , Erreur relative = $\frac{100}{4000}$ = 0,025.

Plus le nombre d'expériences est important, plus le résultat obtenu s'approche du résultat théorique $E(X)$.