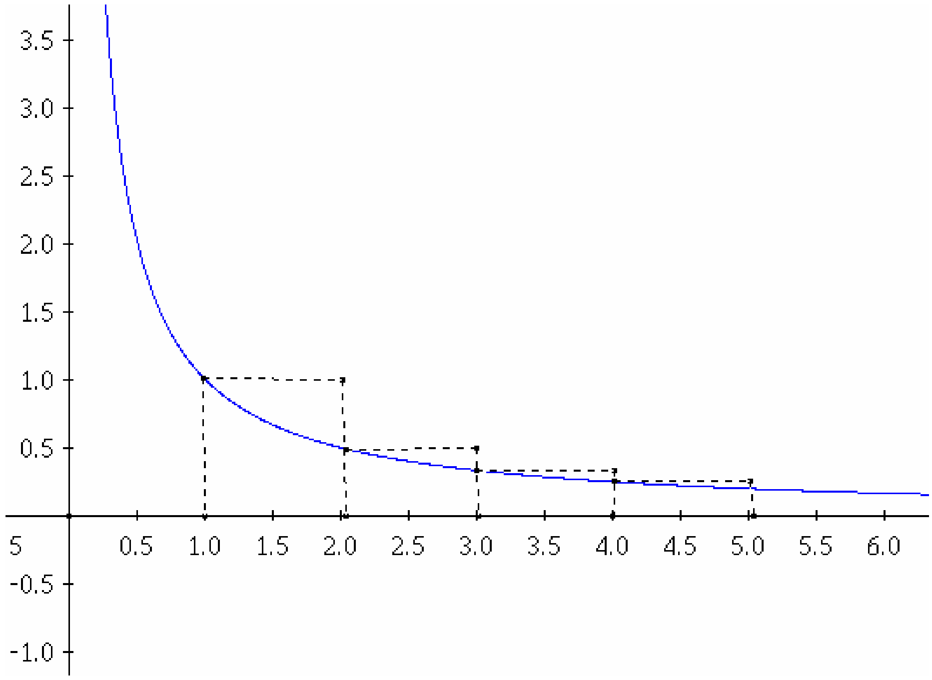
Soit la *suite harmonique* (u_n) telle que $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$.

1/ En considérant la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, et une intégrale adaptée, prouver que :

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$



Soit $0 \leq p \leq n - 1$.

$p \leq x \leq p+1 \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{p}$, d'où : $\int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\int_p^{p+1} 1\mathrm{d}x$

$\int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}[\,x\,]_p^{p+1} \Leftrightarrow \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}$.

On en déduit : $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \ldots.. + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n}$.

soit $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n} \Leftrightarrow [\,\ln x\,]_1^{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n}$.

d'où : $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n}$.

2/ En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n devient infini.

On sait $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) \leq \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n}) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{n}) = +\infty$.

On conclue que la *suite harmonique* est divergente : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.