Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux.

1/ Montrer qu'alors $a + b$ et $a^2 + ab + b^2$ le sont aussi.

Soit p un diviseur premier, commun à $a + b$ et $a^2 + ab + b^2$. ($x \mid y$ signifie que x divise exactement y)

$p \mid a^2 + ab + b^2 \Rightarrow p \mid a(a + b) + b^2$.

Comme $p \mid a + b$, on conclue que, par différence, $p \mid b^2$.

Tout nombre premier est premier avec un entier qu'il ne divise pas.

Par ailleurs, le Théorème de Gauss affirme que : Si $x \mid yz$ et que PGCD (x ; y) = 1 , alors $x \mid z$.

Donc : $p \mid b.b$ et PGCD (p ; b) = 1 , fait que $p \mid b$. Ne divisant pas le premier b , p divise le second b .

Il y a contradiction, donc $p \mid b$.

Par différence : $p \mid a + b$ et $p \mid b \Rightarrow p \mid a$.

p diviseur commun à a et b vaut 1 , puisque PGCD (a ; b) = 1 .

On aboutit bien au résultat attendu, PGCD ($a + b$; $a^2 + ab + b^2$) = 1 .

2/ En déduire les entiers naturels a et b , premiers entre eux, tels que $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{7}{37}$.

$\dfrac{7}{37}$ n'étant pas simplifiable (irréductible), les fractions seront égales si $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{7k}{37k}$.

$\begin{cases} a + b = 7k \\ a^2 + ab + b^2 = 37k \end{cases}$ montre que k est diviseur commun à $a + b$ et $a^2 + ab + b^2$, nombres premiers entre eux.

En conséquence, $k = 1$.

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + ab + b^2 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ (a + b)^2 - ab = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases} .$$

Deux nombres ayant pour somme S et pour produit P , sont les racines de $X^2 - SX + P = 0$.

a , b sont donc les racines de $X^2 - 7X + 12 = 0$, soit $X_1 = 3$ et $X_2 = 4$.

Les couples cherchés sont : (a ; b) = (3 ; 4) et (a ; b) = (4 ; 3) .