Soit a un entier naturel non nul.

Montrer que le reste de la division euclidienne de $[a^2 + (a-1)^2]^2$ par $4a^2$ admet pour reste $(2a-1)^2$.

Il faut d'abord vérifier que $(2a-1)^2$ peut être un reste dans cette division :

$a = bq + r$ impose $0 \leq r < b$.

Or, $0 \leq (2a-1)^2 < 4a^2$ puisque $(2a-1)^2 = 4a^2 - 4a + 1$ et que $a \geq 1 \Rightarrow -4a + 1 < 0$.

Il faut ensuite vérifier que : $a - r = bq$, donc multiple entier de b .

$a - r = [a^2 + (a-1)^2]^2 - (2a-1)^2 = [a^2 + (a-1)^2 - (2a-1)][\,a^2 + (a-1)^2 + (2a-1)] = (2a^2 - 4a + 2)(2a^2)$

$a - r = 4a^2(a^2 - 2a + 1) = 4a^2(a-1)^2 = bq$, multiple entier du diviseur b .