1/ Déterminer le polynôme réel de degré 3 , $P(x)$, tel que $P(x + 1) – P(x) = x^2$, pour tout x réel.

Posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$P(x + 1) – P(x) = [a(x + 1)^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 1) + d] – [ax^3 + bx^2 + cx + d]$

$P(x + 1) – P(x) = [a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x + 1) + d] – [ax^3 + bx^2 + cx + d]$

$P(x + 1) – P(x) = 3ax^2 + (3a + 2b)x + (a + b + c)$ que l'on *identifie* à $P(x + 1) – P(x) = x^2$, pour tout x réel.

$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, d étant quelconque. D'où $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$ par exemple ($d = 0$) .

2/ Montrer par récurrence que pour tout n entier , $P(n)$ est un nombre entier.

Soit la proposition P_n | $P(n)$ est un nombre entier si n est entier.

a) *Initialisation* : P_0 est vraie, puisque, pour $n = 0$, on obtient $P(0) = 0$, nombre entier.

b) *Hérédité* : Supposons P_n vraie ($P(n)$ nombre entier) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($P(n + 1)$ nombre entier) ?

Soit donc $P(n) = N$ nombre entier. Alors : $P(n + 1) – P(n) = n^2 \Leftrightarrow P(n + 1) = P(n) + n^2 = N + n^2$, qui est bien un nombre entier.

c) *Conclusion* : On conclue que P_n est vraie pour tout entier naturel n .

3/ On pose $S_1 = 1$ et $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + ….. + n^2$. Démontrer que $S_n = P(n + 1) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

$1^2 = P(2) – P(1)$,

$2^2 = P(3) – P(2)$,

…………………

$(n – 1)^2 = P(n) – P(n – 1)$,

$n^2 = P(n + 1) – P(n)$.

Par addition, on obtient :

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ….. + n^2 = [P(2) – P(1)] + [P(3) – P(2)] + ….. + [P(n) – P(n – 1)] + [P(n + 1) – P(n)]$.

Les termes s'éliminent deux à deux, sauf le premier et le dernier.

$S_n = P(n + 1) – P(1) = [\frac{1}{3}(n + 1)^3 – \frac{1}{2}(n + 1)^2 + \frac{1}{6}(n + 1)] – [\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}] = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

Il est alors aisé de vérifier que $S_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.