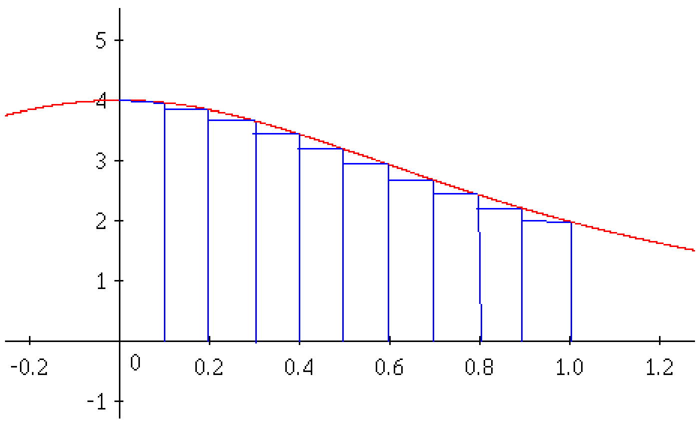
Chercher un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx$ par la méthode des rectangles, à l'aide de dix rectangles.

$f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ est une fonction continue, *strictement décroissante* sur $[0\,;1]$.

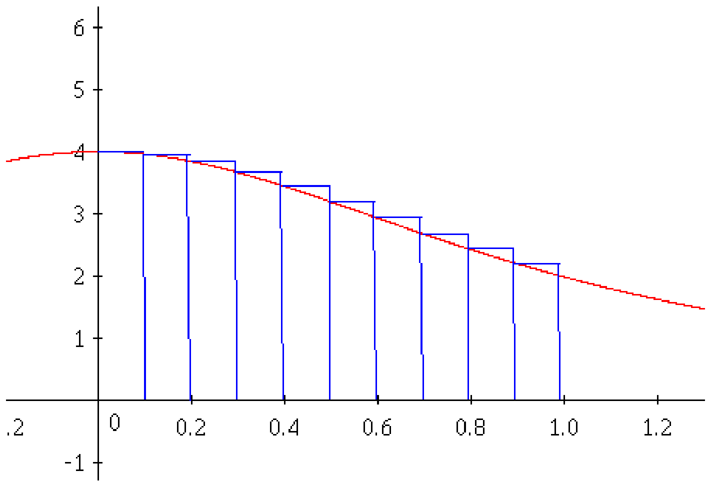
On découpe $[0\,;1]$ en dix intervalles de même largeur $h = 0{,}1$.



Les *rectangles minorants* ont pour somme de surface

$s = 0{,}1[f(0{,}1) + f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(0{,}5) + f(0{,}6) + f(0{,}7) + f(0{,}8) + f(0{,}9) + f(1)]$

$s = \dfrac{4}{10}\left(\dfrac{1}{1{,}01} + \dfrac{1}{1{,}04} + \dfrac{1}{1{,}09} + \dfrac{1}{1{,}16} + \dfrac{1}{1{,}25} + \dfrac{1}{1{,}36} + \dfrac{1}{1{,}49} + \dfrac{1}{1{,}64} + \dfrac{1}{1{,}81} + \dfrac{1}{2}\right) \approx 3{,}0399$



Les *rectangles majorants* ont pour somme de surface

$S = 0{,}1[f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(0{,}5) + f(0{,}6) + f(0{,}7) + f(0{,}8) + f(0{,}9)]$

$S = \dfrac{4}{10}\left(1 + \dfrac{1}{1{,}01} + \dfrac{1}{1{,}04} + \dfrac{1}{1{,}09} + \dfrac{1}{1{,}16} + \dfrac{1}{1{,}25} + \dfrac{1}{1{,}36} + \dfrac{1}{1{,}49} + \dfrac{1}{1{,}64} + \dfrac{1}{1{,}81}\right) \approx 3{,}2399$

Donc : $3{,}0999 < \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx < 3{,}2399$. Il est à noter que $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx = \pi \approx 3{,}1416$.