Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$.

a) Trouver les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{2-x}$.

On remet au même dénominateur, pour ensuite *identifier* les numérateurs.

$$f(x) = \frac{a(2-x)}{2-x} + \frac{b}{2-x} = \frac{a(2-x)+b}{2-x} = \frac{-ax+(2a+b)}{2-x}.$$

On obtient $\begin{cases} -a = 3 \\ 2a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$. Donc, $f(x) = -3 + \dfrac{7}{2-x}$.

b) Préciser son domaine de définition.

$f(x)$ est calculable si son dénominateur $2-x$ n'est pas nul, soit $x \neq 2$. Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

c) Montrer que f est croissante sur $]-\infty\ ;2[$ ainsi que sur $]\ 2\ ;+\infty\ [$.

<u>Sur $]-\infty\ ;2[$:</u>

Soit x et x' appartenant à $]-\infty\ ;2[$, soit tels que $-\infty < x \le x' < 2$.

$$-\infty < x \le x' < 2 \Leftrightarrow -2 < -x' \le -x < +\infty \Leftrightarrow 0^+ < 2-x' \le 2-x < +\infty \Leftrightarrow 0^+ < \frac{1}{2-x} \le \frac{1}{2-x'} < +\infty\ ,$$

d'où : $0^+ < \dfrac{7}{2-x} \le \dfrac{7}{2-x'} < +\infty \Leftrightarrow -3^+ < -3 + \dfrac{7}{2-x} \le -3 + \dfrac{7}{2-x'} < +\infty$.

On constate que : $-\infty < x \le x' < 2 \Rightarrow -3^+ < f(x) \le f(x') < +\infty$. f est donc *croissante* sur $]-\infty\ ;2[$.

<u>Sur $]2\ ;+\infty[$:</u>

Soit x et x' appartenant à $]2\ ;+\infty[$, tels que $2 < x \le x' < +\infty$.

$$2 < x \le x' < +\infty \Leftrightarrow -\infty < -x' \le -x < -2 \Leftrightarrow -\infty < 2-x' \le 2-x < 0^- \Leftrightarrow -\infty < \frac{1}{2-x} \le \frac{1}{2-x'} < 0^-\ ,$$

d'où : $-\infty < \dfrac{7}{2-x} \le \dfrac{7}{2-x'} < 0^- \Leftrightarrow -\infty < -3 + \dfrac{7}{2-x} \le -3 + \dfrac{7}{2-x'} < -3^-$.

On constate que : $2 < x \le x' < +\infty \Rightarrow -\infty < f(x) \le f(x') < -3^-$. f est donc également *croissante* sur $]2\ ;+\infty[$.

Le graphe confirme ces résultats :