Soit f définie sur $I = [-5\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2 - x}$.

a) Trouver les nombres réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{2 - x}$.

On remet au même dénominateur, pour ensuite *identifier* les numérateurs.

$f(x) = \dfrac{a(2-x)}{2-x} + \dfrac{b}{2-x} = \dfrac{a(2-x)+b}{2-x} = \dfrac{-ax + (2a+b)}{2-x}$.

On obtient $\begin{cases} -a = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$. Donc, $f(x) = -3 + \dfrac{7}{2-x}$.

b) Etudier le sens de variation de f sur I .

Soit x et x' appartenant à I , tels que $-5 \leq x \leq x' \leq 1$.

$-5 \leq x \leq x' \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x' \leq -x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - x' \leq 2 - x \leq 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{7} \leq \dfrac{1}{2-x} \leq \dfrac{1}{2-x'} \leq 1$,

d'où : $1 \leq \dfrac{7}{2-x} \leq \dfrac{7}{2-x'} \leq 7 \Leftrightarrow -2 \leq -3 + \dfrac{7}{2-x} \leq -3 + \dfrac{7}{2-x'} \leq 4$.

On constate que : $-5 \leq x \leq x' \leq 1 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq f(x') \leq 4$.

f est donc *croissante* sur I .

c) Montrer que f est bornée sur I .

On vient de prouver que $x \in I \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \in J$, avec $J = [-2\ ;\ 4]$.

La fonction f est bien bornée sur I , ses images ne sortant pas de J .