On se propose de résoudre l'équation $x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = 0$.

1/ On pose $X = x + a$. Déterminer a tel que l'équation se ramène à une forme $X^3 + pX + q = 0$.

$x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = (X - a)^3 - 9(X - a)^2 + 6(X - a) + 56$

$x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = (X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3) - 9(X^2 - 2aX + a^2) + 6(X - a) + 56$

$x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = X^3 - (3a + 9)X^2 + (3a^2 + 18a + 6)X - (a^3 + 9a^2 + 6a - 56)$.

Pour que disparaisse le terme du second degré, il faut poser $3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -3$.

En reportant dans le polynôme, on obtient : $X^3 - 21X + 20 = 0$

2/ Résoudre cette dernière équation après avoir déterminé une racine évidente.

On constate que $X = +1$ est solution, ce qui permet de factoriser $X - 1$.

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir : $X^3 - 21X + 20 = (X - 1)(X^2 + X - 20) = 0$.

$X^2 + X - 20 = 0$ admet pour sa part pour solutions $X = -5$ et $X = +4$.

(on peut remarquer que $X'X'' = \frac{c}{a} = -20$ et $X' + X'' = -\frac{b}{a} = -1$ sont bien vérifiés).

Les solutions de $X^3 - 21X + 20 = 0$ sont $X_1 = +1$, $X_2 = -5$, $X_3 = +4$.

3/ Terminer la résolution de l'équation initiale.

$X = x + a \Leftrightarrow X = x - 3 \Leftrightarrow x = X + 3$.

Les solutions de $x^3 - 9x^2 + 6x + 56 = 0$ sont $x_1 = +4$, $x_2 = -2$, $x_3 = +7$.