Soit la suite (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{a_n + 4} \end{cases}$, pour tout entier naturel $n \geq 0$.

1/ Montrer que $0 \leq a_n \leq 1$ pour tout entier naturel $n \geq 0$.

Soit la proposition $P_n \mid a_n \geq 0$.

a) P_0 est vraie puisque $a_0 = 0$.

b) Soit P_n vraie ($a_n \geq 0$) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ? ($a_{n+1} \geq 0$)

$a_n \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a_n + 3 \geq 0 \\ a_n + 4 \geq 0 \end{cases}$, soit $\dfrac{2a_n + 3}{a_n + 4} = a_{n+1} \geq 0$.

c) On conclue : P_n toujours vraie, soit $a_n \geq 0$, quel que soit $n \geq 0$.

Soit la proposition $Q_n \mid a_n \leq 1$.

a) Q_0 est vraie puisque $a_0 = 0$.

b) Soit Q_n vraie ($a_n \leq 1$) . Peut-on en déduire Q_{n+1} vraie ? ($a_{n+1} \leq 1$)

Il est en général préférable de comparer à 0 plutôt qu'à 1 .

$a_{n+1} - 1 = \dfrac{2a_n + 3}{a_n + 4} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 4}$. Or, $a_n \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} a_n - 1 \leq 0 \\ a_n + 4 \geq 0 \end{cases}$, soit $\dfrac{a_n - 1}{a_n + 4} \leq 0$,

$a_{n+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} \leq 1$.

c) On conclue : Q_n toujours vraie, soit $a_n \leq 1$, quel que soit $n \geq 0$.

La suite (a_n) est *bornée* par 0 et 1 .

2/ Montrer que la suite (a_n) est croissante.

Soit la proposition $R_n \mid a_n \leq a_{n+1}$.

a) R_0 est vraie puisque $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{2a_0 + 3}{a_0 + 4} = \dfrac{3}{4}$, soit $a_0 \leq a_1$.

b) Soit R_n vraie ($a_n \leq a_{n+1}$) . Peut-on en déduire R_{n+1} vraie ? ($a_{n+1} \leq a_{n+2}$)

Il est en général préférable de comparer à 0 plutôt qu'à 1 .

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2a_{n+1} + 3}{a_{n+1} + 4} - \frac{2a_n + 3}{a_n + 4} = \frac{(2a_{n+1} + 3)(a_n + 4) - (2a_n + 3)(a_{n+1} + 4)}{(a_{n+1} + 4)(a_n + 4)} = \frac{5(a_{n+1} - a_n)}{(a_{n+1} + 4)(a_n + 4)}$$

On sait $a_n \geq 0$, pour tout n entier , donc le dénominateur est positif.

On peut en déduire $a_{n+2} - a_{n+1}$ du même signe que $a_{n+1} - a_n$.

Ayant supposé $a_n \leq a_{n+1}$, soit $a_{n+1} - a_n \geq 0$, on déduit $a_{n+2} - a_{n+1} \geq 0$, soit le résultat attendu $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

c) On conclue : R_n toujours vraie, soit $a_n \leq a_{n+1}$, quel que soit $n \geq 0$. La suite (a_n) est croissante.

Que peut-on en déduire ?

Toute suite croissante et majorée converge.

3/ Déterminer sa limite pour n tendant vers l'infini.

Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$.

Passons la relation de récurrence à sa limite , ce qui équivaut à remplacer a_{n+1} et a_n par la limite l , lorsque $n \to +\infty$.

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{a_n + 4}$ devient $l = \dfrac{2l + 3}{l + 4}$, soit $l^2 + 4l = 2l + 3 \Rightarrow l^2 + 2l - 3 = 0$ dont les racines sont $l = 1$ et $l = -3$.

Sachant $0 \leq a_n \leq 1$, on peut conclure $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.