1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$.

$z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})}{2} = 1$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}$.

$S = \{ 1 ; \sqrt{2} \}$ nombres réels.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\boldsymbol{z + \dfrac{1}{z} = 1} \Leftrightarrow z^2 + 1 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$, d'où : $\Delta = b^2 - 4ac = -3$.

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, d'où : $S = \{ \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} \}$.

b) $\boldsymbol{z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}} \Leftrightarrow z^2 + 1 = z\sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$, d'où : $\Delta = b^2 - 4ac = -2$.

$z_3 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_4 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{2}$, d'où : $S = \{ \dfrac{1 + i\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{2} \}$.

3/ Soit le polynôme $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

a) Vérifier que $z = 0$ ne peut être solution.

Pour $z = 0$, on obtient $P(0) = 1$, d'où l'affirmation.

b) Vérifier que $P(z) = 0$ équivaut à $Q(z) = 0$, avec $Q(z) = \left(z + \dfrac{1}{z} \right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z} \right) + \sqrt{2}$.

$P(z) = z^2[z^2 - (1 + \sqrt{2})z + (2 + \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2}).\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}] = z^2 \left[\left(z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2}\right) - (1 + \sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z} \right) + \sqrt{2} \right]$

$P(z) = z^2 \left[\left(z + \dfrac{1}{z} \right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z} \right) + \sqrt{2} \right] = z^2\, Q(z)$.

Comme $P(z) = 0$ n'admet pas $z = 0$ pour racine, cette équation équivaut à $Q(z) = 0$.

c) En déduire, au vu des questions précédentes, les solutions de $P(z) = 0$.

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow \left(z + \dfrac{1}{z} \right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \dfrac{1}{z} \right) + \sqrt{2} = 0$, soit en posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$: $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$.

On déduit, d'après 1/ : $Z_1 = z + \dfrac{1}{z} = 1$ ou $Z_2 = z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$.

D'après 2/ , on obtient : $S = \{ \dfrac{1 + i\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} \}$.