Pour tout entier n non nul, on pose : $A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

1/ Prouver par récurrence que A_n est un entier pour toute valeur de n.

Soit la proposition de récurrence : P_n : « A_n est un nombre entier » .

a) *Inititaition* : Montrons P_1 vraie :

$A_1 = (2+\sqrt{3})^1 + (2-\sqrt{3})^1 = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$ nombre entier , donc P_1 vraie.

b) *Hérédité* : Supposons $\{P_1 , P_2 , ... , P_n\}$ vraies. Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ?

$A_{n+1} = (2+\sqrt{3})^{n+1} + (2-\sqrt{3})^{n+1}$,

$A_{n+1} = (2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] + (2-\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] - (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$,

On remarquera l'astucieuse façon d'introduire A_n puis de retirer les termes en trop.

Comme $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$, on obtient :

$A_{n+1} = (2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] + (2-\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] - (2-\sqrt{3})^{n-1} - (2+\sqrt{3})^{n-1}$,

$A_{n+1} = (2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] + (2-\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n] - [(2-\sqrt{3})^{n-1} + (2+\sqrt{3})^{n-1}]$,

$A_{n+1} = (2+\sqrt{3})A_n + (2-\sqrt{3})A_n - A_{n-1} = 4A_n - A_{n-1}$.

Comme A_{n-1} et A_n sont supposés entiers, on conclue que A_{n+1} l'est également.

L'hérédité est démontrée.

c) *Conclusion* : A_n est entier pour tout n entier non nul.

2/ Vérifier en utilisant le Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p \quad \text{et} \quad (a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}(-b)^p .$$

On constate le signe (-) des puissances *impaires* de $(-b)$.

Par addition celles-ci disparaissent et il ne reste que les puissances paires, multipliées par 2 .

$$(a+b)^n + (a-b)^n = 2[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 + \binom{n}{6}a^{n-6}b^6 + \text{.........}]$$

Comme une puissance paire s'écrit $b^{2p} = (b^2)^p$, on obtient $(\sqrt{3})^{2p} = [(\sqrt{3})^2]^p = 3^p$ nombre entier.

On déduit donc : A_n entier pour tout entier n non nul.