Soit le système (S) suivant $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{6} \end{cases}$.

a) Soit $(x\,;y\,;z)$ un triplet solution de (S) . Calculer $xy+yz+xz$ et xyz .

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2)+2(xy+xz+yz)$,

soit : $6^2 = 14+2(xy+xz+yz) \Leftrightarrow 2(xy+xz+yz) = 36-14 \Leftrightarrow xy+xz+yz = 11$.

De même : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{yz+xz+xy}{xyz} \Leftrightarrow \dfrac{11}{6} = \dfrac{11}{xyz} \Leftrightarrow xyz = 6$.

b) Terminer la résolution de (S) .

On peut remarquer que les trois équations su système donnent des rôles identiques aux inconnues x , y , z .

$xy+xz+yz = 11 \Leftrightarrow xyz+xz^2+yz^2 = 11z \Leftrightarrow 6+(x+y)z^2 = 11z \Leftrightarrow 6+(6-z)z^2 = 11z$,

soit : $z^3-6z^2+11z-6=0$.

$z=1$ est racine évidente, d'où la factorisation de $z-1$: $(z-1)(z^2-5z+6)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z-2)(z-3)=0$,

On déduit : $z=1$ ou $z=2$ ou $z=3$, résultats qui peuvent tout autant être ceux de x et y .

En permutant les solutions, on obtient :

$(x\,;y\,;z) = (1\,;2\,;3)$ ou $(1\,;3\,;2)$ ou $(2\,;1\,;3)$ ou $(2\,;3\,;1)$ ou $(3\,;1\,;2)$ ou $(3\,;2\,;1)$.